Analysis für Informatiker und Statistiker

Dr. Walter Spann, LMU, Wintersemester 2009/10

Nachträge zum Tutorium (IV)

Uwe Lück,[1] 15. Februar 2010

§ 1 Allgemeinerer Zwischenwertsatz (*T49* u. a.): Für diesen Abschnitt gelte $a < b \in \mathbb{R}$.

Für lipschitzstetige Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ wurde in der Vorlesung – 1.22 – angegeben, es existiere ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = 0$ – eine *Nullstelle* – *sofern*

$$f(a) < 0 < f(b) \quad \text{oder} \quad f(a) > 0 > f(b) \tag{1.1}$$

In 4.5 wurde das auf *stetige* Funktionen verallgemeinert. In *Tutoriumsaufgabe 49* wird stattdessen die Voraussetzung

$$f(a) \le 0 \le f(b) \tag{1.2}$$

verwendet. Die entsprechende Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes folgt trivial aus der ursprünglichen Form durch *Fallunterscheidung:* Falls $f(a) = 0$, so gilt $f(x) = 0$ ja für $x = a$, falls $f(b) = 0$ für $x = b$. Auf diese Form wurde eigentlich im Beweis von 4.5 auch Bezug genommen.

Im allgemeinen betrachtet man Funktionen, die nicht *genau* auf $[a, b]$ definiert sind, sondern auf einer *Obermenge.* Zur Anwendung des Zwischenwertsatzes müsste man dann immer auf die jeweilige *Einschränkung* der Funktion auf $[a, b]$ Bezug nehmen – diese Betrachtung zeigt aber, dass auch diese Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes kein Problem ist. Die *Folgerung* 4.6 für *beliebige „Zwischenwerte“* (nicht nur 0) lässt sich in Mengenschreibweise auch so angeben: *Ist f auf einer Obermenge von $[a, b]$ definiert und in $[a, b]$ stetig, so gilt*

$$[\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b)] \subseteq f([a, b]) \tag{1.3}$$

[1] http://www.webdesign-bu.de/uwe_lueck/tutor.html

§ 2 Ableitung von Polynomfunktionen (*nicht vorgetragen*): Aus den Ableitungsregeln für konstante Funktionen, Produkte, Summen (5.5) und Potenzen (Vorlesung 5.2, 5.5) folgt

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=1}^{n} a_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}(k+1)x^k \qquad (n \in \mathbb{N}, x, a_k \in \mathbb{R}) \tag{2.1}$$

(Dies wird in den folgenden Aufgaben verwendet.)

§ 3 $\frac{d}{dx}x^{g(x)}$ **– für** *T50* (d) und *T52* (c) (*nicht vorgetragen*): Aus der Kettenregel, der Produktregel, $\exp' = \exp$ (Vorlesung 5.2 (c)) und $\ln' x = \frac{1}{x}$ (Beispiel (a) nach 5.7) folgt:

$$\frac{d}{dx}x^{g(x)} = \frac{d}{dx}\exp\left(g(x)\ln x\right) = \exp'(g(x)\ln x) \cdot \frac{d}{dx}(g(x)\ln x) \tag{3.1}$$

$$= \exp\left(g(x)\ln x\right) \cdot \big(g'(x)\ln x + g(x)\ln' x\big) \tag{3.2}$$

$$= x^{g(x)} \cdot \left(g'(x)\ln x + \frac{g(x)}{x}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}_+) \tag{3.3}$$

§ 4 Tutoriumsaufgabe 50.

(a) (etwas geschickter als *vorgetragen*) $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ mit

$$f_1(x) = x + 1 \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}) \tag{4.1}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{x} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \tag{4.2}$$

$$f_3(x) = 2^x \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{4.3}$$

Beispiel (b) zu 5.6 der Vorlesung behandelt diese Situation der Verkettung dreier Funktionen. Das *Ergebnis* ist hier

$$f'(x) = -2^{\frac{1}{x+1}}\frac{\ln 2}{(x+1)^2} \tag{4.4}$$

Nach (2.1) hier oben gilt nämlich

$$\frac{d}{dx}(x+1) = 1 \tag{4.5}$$

nach dem Beispiel zu 5.5

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \tag{4.6}$$

und nach Beispiel (a) zu 5.6

$$\frac{d}{dx}2^x = 2^x \ln 2 \tag{4.7}$$

Für **(b)** und **(c)** tippe nur noch *Herrn Spanns* Ergebnisse ab. Produkt- und Quotientenregel, die allgemeine Potenzregel $\frac{d}{dx}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ (Beispiel (b) nach 5.7) und die Ableitungsregel für Polynomfunktionen (2.1) gehen ein.

(b) $f'(x) = \dfrac{3x^2 \sqrt[3]{x^2+1}}{2\sqrt{x^3+1}} + \dfrac{2x\sqrt{x^3+1}}{3\sqrt[3]{x^2+1}^2}$

(c) $f'(x) = \dfrac{x(2\ln x + 1)}{n\sqrt[n]{x^2 \ln x}^{n-1}}$

(d) Aus (3.3) und (2.1) folgt mit $g(x) := x^2 + 1$ ($f(x) = x^{x^2+1}, x > 0$):

$$g'(x) = 2x \tag{4.8}$$

$$f'(x) = x^{x^2+1}\left(2x\ln x + x + \frac{1}{x}\right) \tag{4.9}$$

Lösung von Übungsaufgabe 50 (d) (Herleitung alternativ zur Lösung von Herrn *Jaskolla* in loes13.pdf, $f(x) = x^{(x^x)}$): $g(x)$ von (3.3) ist nun gerade $f(x)$ von *Tutoriumsaufgabe 52* (§ 10), daher folgt aus (10.1)

$$f'(x) = x^{(x^x)}\left((x^x \ln x + 1)\ln x + \frac{x^x}{x}\right) \tag{4.10}$$

$$= x^{x^x+x-1}\left(x(\ln x)^2 + x\ln x + 1\right) \tag{4.11}$$

§ 5 Ableitung und Monotonie (*T51*, *T52*). Nach *Folgerung 5.12* (a) der Vorlesung ist jede in einem offenen Intervall I differenzierbare Funktion f mit überall positiver bzw. negativer Ableitung auf I streng monoton. Dies lässt sich bei Stetigkeit noch auf die „Grenzpunkte fortsetzen“ (vgl. Forster, *Analysis I*, 4. Aufl., § 14, Satz 4):

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Gilt $f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) < 0$, bzw. …) für alle $x \in\,]a, b[$, so ist f (auf $[a, b]$!) (streng) monoton wachsend (bzw. fallend).

Dies folgt wie Folgerung 5.12 (a) recht unmittelbar aus dem *Mittelwertsatz* (Vorlesung 5.10, siehe Beweis von 5.12).

§ 6 Regeln für den Funktionsgrenzwert ∞ (*T51*, *T52*). In *T51* und *T52* habe ich folgende einfache Behauptungen verwendet, für die in der Vorlesung keine Zeit mehr war: *Falls*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty = \lim_{x\to\infty} g(x) \tag{6.1}$$

so

$$\lim_{x\to\infty} f(g(x)) = \infty = \lim_{x\to\infty} f(x)\cdot g(x) \tag{6.2}$$

Außerdem gilt

$$\lim_{x\to\infty} (x^{k+1} - bx^k + c) = \infty \qquad (k \in \mathbb{N}_0, b, c \in \mathbb{R}) \tag{6.3}$$

Wir *beweisen* alles ungefähr gleichzeitig. Es gelte

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \tag{6.4}$$

Gemäß Definition 4.1 (a) der Vorlesung ist

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \infty \tag{6.5}$$

für die Fälle $y_n = f(g(x_n))$, $y_n = f(x_n)g(x_n)$ und $y_n = x_n^{k+1} - bx_n^k$ zu zeigen.

Der linke Fall von (6.2) ist äußerst einfach: Wendet man die *linke* Gleichung der Voraussetzung (6.1) auf die Folge $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ im Argument von f an, so folgt aus der *rechten* Gleichung der Voraussetzung zusammen mit der Voraussetzung (6.4) des Beweises

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{x\to\infty} f(g(x_n)) = \infty \tag{6.6}$$

Für die beiden übrigen Fälle sei $0 < M \in \mathbb{R}$; zu zeigen ist jeweils

$$\exists\, n^* \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n^* : y_n > M \tag{6.7}$$

Wegen der Voraussetzung (6.1) gibt es $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall\, n \geq n_0 : f(x_n) > M \qquad \text{und} \qquad \forall\, n \geq n_1 : g(x_n) > 1 \tag{6.8}$$

Es folgt

$$\forall\, n \geq \max(n_0, n_1) : f(x_n) \cdot g(x_n) > M \cdot 1 = M \tag{6.9}$$

– (6.7) gilt also mit $n^* = \max(n_0, n_1)$, und die *rechte* Seite von (6.2) ist bewiesen.

Schließlich gibt es wegen der Voraussetzung (6.4) des Beweises ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall\, n \geq n_2 : x_n > \max(M + b - c, 1) \tag{6.10}$$

Damit gilt

$$n \geq n_2 \implies x_n^{k+1} - bx_n^k + c = (x_n - b) \cdot x_n^k + c \tag{6.11}$$

$$> (M - c) \cdot 1^k + c \tag{6.12}$$

$$\geq (M - c) + c = M \qquad (k, n \in \mathbb{N}_0) \tag{6.13}$$

– (6.7) gilt also mit $n^* = n_2$, damit ist auch (6.3) bewiesen. Allgemeiner gilt (vgl. Forster, *Analysis 1*, 4. Aufl., (10.14))

$$a_n > 0 \implies \lim_{x\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \infty \qquad (a_k \in \mathbb{R}) \tag{6.14}$$

§ 7 Zwischenwertsatz für Funktionsgrenzwerte (*T51*, *T52*). Die Tutoriumsaufgaben 51 und 52 haben noch folgende Aussage gemeinsam (ohne die Aussage zur Differenzierbarkeit hätte man eine Erweiterung des *Zwischenwertsatzes* bzw. seiner Folgerung, vgl. hier oben § 1):

Es seien $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ stetig mit

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \textit{und} \qquad \forall x \in\,]a, \infty[:\ \exists\, f'(x) > 0 \tag{7.1}$$

(etwas salopp). *Dann bildet f seinen Definitionsbereich* bijektiv *auf* $[f(a), \infty[$ *ab.*

Beweis: *Injektivität* folgt aus der Ableitungsaussage von (7.1) sowie § 5 hier oben. Zur *Surjektivität:* $f(a)$ ist trivialerweise in $f\big([a, \infty[\big)$. Sei nun $y > f(a)$. Wir betrachten die (etwas triviale) Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$x_n := n \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{7.2}$$

Das Archimedische Axiom A4 der Vorlesung (vor Folgerung 1.58) besagt damit

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \infty \tag{7.3}$$

In (7.1) wird nun $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, vorausgesetzt, nach Definition 4.1 (a) bedeutet das

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\; \forall\, n \geq n_0 : f(x_n) > y \qquad \text{insbesondere} \qquad f(x_{n_0}) > y \tag{7.4}$$

Nun ist g mit $g(x) := f(x)$ für $x \in [a, x_{n_0}]$ eine stetige Funktion mit $g(a) < y < g(x_{n_0})$, nach der Folgerung 4.6 aus dem Zwischenwertsatz gibt es daher ein $x_0 \in [a, x_{n_0}]$ mit $f(x_0) = g(x_0) = y$, q. e. d.

Die Überschrift dieses Abschnitts bezieht sich auch auf die ähnliche Situation von $\lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$ – davon taucht hier nur ein Spezialfall zu Tutoriumsaufgabe 52 Teil (c) auf.

§ 8 Tutoriumsaufgabe 51 (*nicht vorgetragen, im wesentlichen nach Herrn Spanns Vorlage*)

(a) f ist überall differenzierbar (streng genommen vielleicht nicht in 0) und damit stetig (Folgerung 5.4), und zwar nach (2.1)

$$f'(x) = (n+1)x^n - 3nx^{n-1} \tag{8.1}$$

$$= (n+1)x^{n-1}\left(x - \frac{3n}{n+1}\right) \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}) \tag{8.2}$$

Wegen $(n+1)x^{n-1} > 0$ gilt

$$f'(x)\; R\; 0 \iff x\; R\; \frac{3n}{n+1} \qquad (R \in \{<, =, >\}) \tag{8.3}$$

Aus 5.13 der Vorlesung folgt, dass

$$a := \frac{3n}{n+1} \tag{8.4}$$

globale Minimalstelle von f ist. Nach 5.9 gilt für jede Minimalstelle x von f, dass $f'(x) = 0$; dies ist gemäß (8.3) nur für $x = a$ der Fall, so dass dies die *einzige* globale Minimalstelle ist. Und tatsächlich

$$3n = 2n + n > n + n \geq n + 1 \tag{8.5}$$

und daher

$$a = \frac{3n}{n+1} > 1 \tag{8.6}$$

wie in der Aufgabenstellung behauptet.

(b) Wegen (8.3) und § 5 hier oben ist f streng monoton fallend in $[0, a]$, wegen $a > 1$ daher

$$f(a) < f(1) = 1^{n+1} - 3 \cdot 1^n + 2 = 0 \tag{8.7}$$

Wir betrachten die Funktion stetige Funktion g mit $g(x) := f(x)$ für $x \in [a, \infty[$. Nach (6.3) ist $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, und wegen (8.3) sowie § 7 hier oben gibt es daher *genau ein* $x_0 \in [a, \infty[$ mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (wobei $x_0 \neq a$).

§ 9 ε-δ-Kriterium für Funktionsgrenzwerte Die folgende Aussage verallgemeinert Satz 4.10 der Vorlesung auf Funktionsgrenzwerte an Rändern des Definitionsbereichs (wie in *T52*). Der in der Vorlesung fehlende Beweis wird nachgetragen.

Es seien $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gibt. Dann gilt

$$\lim_{x\to a} = b \tag{9.1}$$

*(gemäß Definition 4.1 (*a*) der Vorlesung durch* Folgen*) genau dann, wenn*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta\colon \;\; f(U_\delta(a) \cap D) \subseteq U_\varepsilon(b) \tag{9.2}$$

Hierbei ist – zur Erinnerung – z. B. $U_\delta(a) = \{\, x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \,\}$.

Beweis: Wir nehmen zuerst (9.2) an, um auf (9.1) zu schließen. Es seien x_n eine gegen a konvergierende Folge und $\varepsilon > 0$ (zu zeigen: fast alle $f(x_n)$ liegen in $U_\varepsilon(b)$). Wegen (9.2) existiert ein $\delta > 0$ so, dass $f(U_\delta(a) \cap D) \subseteq U_\varepsilon(b)$. Wegen $x_n \longrightarrow a$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\{\, x_n : n \geq N \,\} \subseteq U_\delta(a)$. Daher $f(\{\, x_n : n \geq N \,\}) \subseteq U_\varepsilon(b)$. – Statt der Umkehrung beweisen wir ihre *Kontraposition*. Wir nehmen also an, dass (9.2) *nicht* gilt, um zu schließen, dass auch (9.1) *nicht* gilt. Es gibt mithin ein ε, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ für mindestens ein Element x von $U_{1/n}(a)$ dessen Bild $f(x)$ *nicht* in $U_\varepsilon(b)$ liegt. Wir wählen jeweils ein solches Element von von $U_{1/n}(a)$ und nennen es x_n. Damit liegt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vor, die gegen a konvergiert, denn für $\delta > 0$ gibt es wegen des Archimedischen Axioms ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \delta$, womit $x_n \in U_{1/n}(a) \subseteq U_{1/N}(a) \subseteq U_\delta(a)$ für $n \geq N$ gilt. Nach der Wahl von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ jedoch nicht gegen $f(b)$ – q. e. d.

Bemerkung 1: Von der „Wahl“ unendlich vieler x_n mag man sich etwas „überfordert“ fühlen. Tatsächlich verwendet die Annahme der Existenz dieser Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als *mengentheoretisches Objekt* eine schwache Version des *Auswahlaxioms*.

Bemerkung 2: Das ε-δ-Kriterium ist wohl „anschaulicher“ als das „Folgenkriterium“ aus Definition 4.1 der Vorlesung.

§ 10 Tutoriumsaufgabe 52 (weitgehend wie *nach Herrn Spann vorgetragen*, hier wegen Anwendungen der vorigen Hilfssätze wiederholt): Die Lösungen zu (a) und (c) beruhen auf ($f(x) = x^x, x > 0$)

$$f'(x) = x^x \cdot (\ln x + 1) \qquad (x \in \mathbb{R}_+) \tag{10.1}$$

Dies folgt aus (3.3) mit $g(x) := x$ $(x > 0)$, wofür (2.1) (mit $n = 1$, $a_1 = 1$, $a_0 = 0$) $g'(x) = 1$ ergibt. Damit ist f auch *stetig* (Folgerung 5.4).

(a) (*Eventuell habe ich etwas etwas Falsches an die Tafel geschrieben.*) Aus 2.24 (e) (Eigenschaften des Logarithmus) folgt

$$\ln x + 1 = \ln x + \ln e = \ln(xe) \tag{10.2}$$

Wegen $x^x = e^{x \ln x} > 0$ folgt

$$f'(x)\ R\ 0 \iff \ln(xe)\ R\ 0 \iff xe\ R\ 1 \iff x\ R\ \frac{1}{e} \qquad (R \in \{<, =, >\}) \tag{10.3}$$

Aus 5.13 der Vorlesung folgt, dass $\frac{1}{e} = e^{-1}$ globale Minimalstelle von f ist. Nach 5.9 gilt für jede Minimalstelle x von f, dass $f'(x) = 0$; dies ist gemäß (10.3) nur für $x = \frac{1}{e}$ der Fall, so dass dies die *einzige* globale Minimalstelle ist.

(b) Beispiel (d) zu *Definition 4.1* der Vorlesung liefert

$$\lim_{x\to 0} x^\beta \ln x = 0 \qquad (\beta \in \mathbb{R}_+) \tag{10.4}$$

– *hier* ist $\beta = 1$. Wegen der Stetigkeit von exp (4.2 (c)) folgt

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x \ln x} = \exp \lim_{x\to\infty} (x \ln x) = e^0 = 1 \tag{10.5}$$

(6.3) bedeutet mit $k = 0 = b$

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty \tag{10.6}$$

(was trivial ist und ganz einfach direkt gezeigt werden könnte). Aus der rechten Gleichung von (6.2) mit $f(x) := x$ und $g(x) := \ln x$ $(x > 0)$ und mit Beispiel (c) zu Definition 4.1 ($\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$) folgt

$$\lim_{x\to\infty} x \ln x = \infty \tag{10.7}$$

Daraus und aus der *linken* Gleichung von (6.2) mit $f(x) := e^x$ und $g(x) := x \ln x$ $(x > 0)$

$$\lim_{x\to\infty} x^x = \lim_{x\to\infty} e^{x \ln x} = \infty \tag{10.8}$$

Wegen (10.5) lässt sich f zu einer stetigen Funktion $\bar{f} : [0\,\infty[$ *fortsetzen*, für die $\bar{f}(0) = 1$ und $\bar{f}(x) = f(x)$ für $x > 0$ gilt.

Der *Graph* von f beginnt links bei (0;1), fällt rechtswärts auf $(e^{-1}, f(e^{-1}))$ wobei $f(e^{-1}) = e^{-\frac{1}{e}} > 0$ ($(e^{-1}, f(e^{-1})) \approx (0{,}37; 0{,}69)$) –, um dann wieder (zunehmend) anzusteigen.

Dass

$$x \in \left]0, e^{-1}\right[\implies f(x) < 1 \tag{10.9}$$

folgt dabei so: *Angenommen*, $0 < x_0 < e^{-1}$ und $f(x_0) \geq 1$. Wir betrachten die *streng monoton fallende* Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n := \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{10.10}$$

Wegen des Archimedischen Axioms gibt es ein n_0, so dass

$$x_{n_0} = \frac{1}{n_0} < x_0 \tag{10.11}$$

Nach (10.3) ist $\forall\, x < e^{-1} : f'(x) < 0$. Nach 5.12 ist die Einschränkung von f auf $\left]0, e^{-1}\right[$ *streng monoton fallend*, somit $\left(f(x_n)\right)_{n \geq n_0}$ *streng monoton wachsend.* Daher

$$n \geq n_0 \implies f(x_n) = f\left(\frac{1}{n}\right) > f\left(\frac{1}{n_0}\right) > f(x_0) \geq 1 \tag{10.12}$$

$$\implies |f(x_n) - 1| \geq f(x_{n_0}) - 1 > f(x_0) - 1 \geq 0 \tag{10.13}$$

d. h. alle $f(x_n)$ mit $n \geq n_0$ liegen außerhalb $U_\varepsilon(1)$, wobei $\varepsilon = f(x_{n_0}) - 1 > 0$ – im Widerspruch zu $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$. – Herr *Jaskolla* verallgemeinert dies in seiner Lösung zu *Übungsaufgabe 51* zu einem Hilfssatz über stetige Funktionen, den man hier durch Anwendung auf die stetige Fortsetzung $\bar{f}$ von f nützen könnte. (Herrn Jaskollas Hilfssatz verbessert in gewisser Weise den in § 5 dargestellten Sachverhalt, den man hier ebenfalls durch Anwendung auf $\bar{f}$ hätte nützen können.)

Zudem muss man die Zeichnung des Graphen mit der *Stetigkeit* von f begründen, die nach Folgerung 5.4 der Vorlesung aus der *Differenzierbarkeit* von f folgt – wir haben f' ja oben angegeben.

Aus (10.5) zusammen mit dem *ε-δ-Kriterium* folgt schließlich, dass sich der Graph von f bei Annäherung der Funktionsargumente an 0 an 1 annähert.

(c) Es sei

$$y \in \left]e^{-\frac{1}{e}}, 1\right[\tag{10.14}$$

Wir zeigen, dass genau ein $x \in \left]0, e^{-1}\right[$ und genau ein $x \in \left]e^{-1}, \infty\right[$ die Gleichung $x^x = y$ (also $f(x) = y$) erfüllt, während $(e^{-1})^{e^{-1}} = f\big(e^{-1}\big) \neq y$ – in Aufgabenteil (a) wurde ja

$$\forall\, x \neq e^{-1} : f(x) > f\big(e^{-1}\big) \tag{10.15}$$

bewiesen. f hat dann insgesamt genau 2 Nullstellen.

Wir betrachten die wieder Nullfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit aus (10.10). Nach Aufgabenteil (b) gilt $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$. Nach Definition 4.1 (a) und wegen $y - 1$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, n \geq n_0 : |f(x_n) - 1| < 1 - y \qquad \text{und} \qquad n_0 > e \tag{10.16}$$

Insbesondere gilt dann – da ja $x_{n_0} < e^{-1}$ und nach Aufgabenteil (b) $f(x_{n_0}) < 1$ –

$$1 - f(x_{n_0}) = |f(x_{n_0} - 1)| < 1 - y \tag{10.17}$$

$$f(x_{n_0}) > y > f(e^{-1}) \tag{10.18}$$

Wie f (b)) ist die Funktion g mit $g(x) := f(x)$ für $x \in \left[x_{n_0}, e^{-1}\right]$ *stetig.* Wegen (10.18) und der Folgerung aus dem Zwischenwertsatz (§ 1) gibt es daher ein $x_0 \in \left[0, e^{-1}\right]$ mit $x^x = f(x) = y$. f ist auf $\left]0, e^{-1}\right[$ ja *streng monoton fallend* und daher injektiv, daher gibt es kein anderes $x \in \left]0, e^{-1}\right[$ mit $x^x = f(x) = y$.

Zu $]e^{-1}, \infty[$ betrachten wir die Funktion g mit $g(x) := f(x)$ für $x \in \left[e^{-1}, \infty\right[$. Sie ist wie f stetig, und wegen (10.3) und $\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ (Aufgabenteil (b)) folgt aus § 5 Existenz genau eines $x \in \left]e^{-1}, \infty\right[$ mit $x^x = f(x) = g(x) = y$.