Analysis für Informatiker und Statistiker
Dr. Walter Spann, LMU, Wintersemester 2009/10

Nachträge zum Tutorium (III): exp, allgemeine Potenz, Reihen

Uwe Lück,[1] 15. Februar 2010

§ 1 Unwichtige Ergänzung zu T34 (c) (Potenz und Wurzel vertauschen): Für die Behauptung

$$\sqrt{1+\tfrac{1}{n}}^{\,n} = \sqrt{\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n} \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{1.1}$$

bzw. allgemein

$$\sqrt[k]{a}^{\,n} = \sqrt[k]{a^n} \qquad (a \in [0,\infty[\,, k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0) \tag{1.2}$$

hatte ich mich (zuerst) auf eine bloß *ähnliche* Situation bei T29 (b) bezogen. Habe ich dann wenigstens

$$\sqrt[k]{a^n} = \sqrt[k]{\underbrace{a\cdots a}_{n\text{-mal}}} = \underbrace{\sqrt[n]{a}\cdots\sqrt[n]{a}}_{n\text{-mal}} = \sqrt[k]{a}^{\,n} \tag{1.3}$$

gebracht, was nach 1.24 (b) „anschaulich klar“ ist (vgl. (3.3))? *Formal* betrachtet man stattdessen x^n als *rekursiv definiert* durch

$$x^0 = 1 \qquad \text{und} \qquad x^{n+1} = x^n \cdot x \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{1.4}$$

Aus (1.4) (erst mit $x = a$, dann mit $x = \sqrt[k]{n}$) folgt (1.2) durch vollständige Induktion so:

$$\sqrt[k]{a^0} = 1 = \sqrt[k]{a}^{\,0} \tag{1.5}$$

$$\sqrt[k]{a^{n+1}} = \sqrt[k]{a^n \cdot a} \overset{1.24(b)}{=} \sqrt[k]{a^n}\,\sqrt[k]{a} \overset{I.V.}{=} \sqrt[k]{a}^{\,n}\,\sqrt[k]{a} = \sqrt[k]{a}^{\,n+1} \tag{1.6}$$

[1] http://www.webdesign-bu.de/uwe_lueck/tutor.html

§ 2 Tutoriumsaufgabe 35: Wegen Übungsaufgabe *32* (a) gilt

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq \sqrt{e^x e^{-x}} = 1 \qquad (x \in [0, \infty[) \tag{2.1}$$

daher

$$\cosh([0, \infty[) \subseteq [1, \infty[\tag{2.2}$$

Man kann deshalb

$$f : [0, \infty[\to [1, \infty[\,, x \mapsto \cosh x \tag{2.3}$$

definieren. Die Behauptung der Aufgabenstellung ist dann gleichbedeutend damit, dass f eine Umkehrabbildung

$$g : [1, \infty[\to [0, \infty[\tag{2.4}$$

hat, die ja auch angegeben werden soll. Wir versuchen es mit

$$g(y) := \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) \qquad (y \geq 1) \tag{2.5}$$

(ich verrate später warum). Eine Vorbetrachtung: Wegen

$$x \geq 0 \implies e^x \geq 1 \geq e^{-x} \tag{2.6}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1} &= \sqrt{\frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - 1} && (2.7)\\
&= \sqrt{\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - 1} = \sqrt{\frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}} && (2.8)\\
&= \sqrt{\frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4}} && (2.9)\\
&= \sqrt{\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} = \left|\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right| && (2.10)\\
&= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad (x \geq 0) && (2.11)
\end{aligned}$$

Daher

$$\begin{aligned}
g(f(x)) &= \ln\left(f(x) + \sqrt{f(x)^2 - 1}\right) && (2.12)\\
&= \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1}\right) && (2.13)\\
&= \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) && (2.14)\\
&= \ln e^x = x \qquad (x \geq 0) && (2.15)
\end{aligned}$$

Mit dem Trick

$$\frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}} = \frac{y-\sqrt{y^2-1}}{\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)\left(y-\sqrt{y^2-1}\right)} = y-\sqrt{y^2-1} \tag{2.16}$$

rechnet man auch leicht

$$f(g(y)) = \frac{e^{\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)} + e^{-\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)}}{2} = y \qquad (y \geq 1) \tag{2.17}$$

aus. Damit ist gezeigt, dass g Umkehrfunktion von f ist, das war's.

Zum Geheimnis der Umkehrfunktion: Damit g Umkehrfunktion von f ist, muss ja

$$f(g(y)) = y \qquad (y \geq 1) \tag{2.18}$$

gelten. Mit

$$x := g(y) \tag{2.19}$$

findet man folgende dazu äquivalente Bedingungen:

$$\begin{aligned}
f(x) = y \iff y &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} && (2.20)\\
\iff e^x - 2y + e^{-x} &= 0 && (2.21)\\
\overset{e^x>0}{\iff} (e^x)^2 - 2ye^x + 1 &= 0 && (2.22)\\
\overset{y\geq 1}{\iff} e^x &= \frac{2y \pm \sqrt{4y^2-4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2-1} && (2.23)\\
\iff x &= \ln\left(y \pm \sqrt{y^2-1}\right) && (2.24)
\end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile hatten wir uns oben für „+“ entschieden. Tatsächlich wäre „−“ nicht gut gewesen, denn der Trick (2.16) zeigt

$$\ln\left(y-\sqrt{y^2-1}\right) = \ln\frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}} = -\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right) < 0 \qquad (y > 1) \tag{2.25}$$

man hätte also $g(y) = x < 0$, dafür ist aber $f(g(y)) = f(x)$ nicht definiert.

§ 3 Tutoriumsaufgabe 36.

(a) In einer *„Bemerkung“*, die *Satz und Definition 2.23* der Vorlesung unmittelbar vorangeht, wird die Schreibweise

$$e^x := \exp x \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{3.1}$$

eingeführt. Vor *Satz 2.24* tritt

$$a^x := e^{x\ln a} = \exp(x \ln a) \qquad (a \in \mathbb{R}_+ := [0,\infty[\,, x \in \mathbb{R}) \tag{3.2}$$

hinzu. *Satz 2.24* verallgemeinert damit Rechenregeln, die bis dahin nur für die Schreibweisen

$$a^n := \underbrace{a \cdots a}_{n-mal} \qquad (a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}) \tag{3.3}$$

$$a^0 := 1 \qquad (a \in \mathbb{R}) \tag{3.4}$$

$$a^{-n} := \left(\frac{1}{a}\right)^n \qquad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}) \tag{3.5}$$

aus *1.3* der Vorlesung galten – d. h. a^m war nur für $m \in \mathbb{Z}$ definiert. Für die Abbildung

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto a^x = e^{x \ln a} = \exp(x \ln a) \qquad (a \in \mathbb{R}_+) \tag{3.6}$$

ist auch die Bezeichnung $\exp_a$ (*„Exponentialfunktion zur Basis a“*) gebräuchlich.

Sind $a, b \in \mathbb{R}_+$, so ist auch $\frac{a}{b} \in \mathbb{R}_+$. Aus (3.2), *2.23* (b), 2.21 (c) und 2.22 (a) folgt daher

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = e^{x \ln \frac{a}{b}} = e^{x \cdot (\ln a - \ln b)} = \frac{e^{x \ln a}}{e^{x \ln b}} = \frac{a^x}{b^x} \tag{3.7}$$

(b) In *Satz 2.24* (d) wird die Bezeichnung

$$\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\ln x}{\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}_+) \tag{3.8}$$

für die *Umkehrfunktion* von $\exp_a$ eingeführt. Damit folgt ganz einfach

$$\log_a b \cdot \log_b a = \frac{\ln b}{\ln a} \cdot \frac{\ln a}{\ln b} = 1 \qquad (a, b \in \mathbb{R}_+) \tag{3.9}$$

(c) Wegen $\ln = \log_e$ und $e > 1$ folgt aus *Satz 2.26* (d) oder (e) (aus meiner Kopie des Skriptums wird nicht ganz klar, welche Reihenfolge an der Tafel stand)

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = -\infty \tag{3.10}$$

Nach Voraussetzung ist

$$b := \lim_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{N} \tag{3.11}$$

daher gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, n \geq n_0 : b_n > \frac{1}{2} \tag{3.12}$$

Ist $M < 0$, so gibt es wegen (3.10) ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, n \geq n_1 : \ln a_n < 2M \tag{3.13}$$

also wegen (3.12)

$$\forall\, n \geq \max(n_0, n_1) : b_n \ln a_n < M \tag{3.14}$$

Damit ist auch

$$\lim_{n\to\infty} b_n \ln a_n = -\infty \tag{3.15}$$

gezeigt worden. Aus (3.2), (3.15) und *Satz 2.26* (a) (mit $\beta = 0$) folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n \ln a_n} = 0 \tag{3.16}$$

Andererseits ist wegen $b \in \mathbb{N}$ 0^b definiert, und zwar

$$0 = 0^b = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \tag{3.17}$$

was zusammen mit (3.16) die Behauptung

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \tag{3.18}$$

ergibt.

(d) Ersetzt man in Aufgabenteil (c) die Voraussetzung $b \in \mathbb{N}$ durch $b = 0$, so erhält man

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = 0^b = 1 \tag{3.19}$$

(3.18) ist dann *im Allgemeinen* falsch, jedoch *nicht immer*. Versucht man etwa

$$a_n = \frac{1}{n} = b_n \tag{3.20}$$

so gilt

$$a_n^{b_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \tag{3.21}$$

wegen $\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^n = n$, und wegen

$$1 = \sqrt[n]{\frac{n}{n}} \overset{1.24(b)}{=} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \tag{3.22}$$

gilt

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \tag{3.23}$$

Daher ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \overset{2.7(d)}{=} 1 \tag{3.24}$$

zusammen mit (3.19) folgt also wieder (3.18).

§ 4 Ergänzende Hinweise zu Tutoriumsaufgabe 37: (*nach Herrn Spann*)

(a) Nach Hinweis

$$e \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \tag{4.1}$$

also

$$\frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+2} \cdot e} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}}{e} \geq 1 \tag{4.2}$$

Im Induktionsschritt folgt daraus die letzte Ungleichung in

$$(n+1)! = n!(n+1) \leq \frac{(n+1)^{n+2}}{e^n} \leq \frac{(n+2)^{n+2}}{e^{n+1}} \tag{4.3}$$

(b) Die Behauptung folgt mit 1.24 (c) und 2.5 (f) aus

$$n \leq n+1 \leq 2n \tag{4.4}$$

(c) Inzwischen können wir wegen 2.22 (b) recht einfach rechnen

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \sqrt[n]{\frac{n!\sqrt{2\pi n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n e\sqrt{2\pi n}}} = \frac{1}{e}\sqrt[n]{\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}}\sqrt[2n]{2\pi n} \tag{4.5}$$

$$= \frac{1}{e} \cdot \sqrt[n]{\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}} \cdot \sqrt[2n]{2\pi} \cdot \sqrt{\sqrt[n]{n}} \tag{4.6}$$

Darin geht der zweite Faktor wegen des Hinweises gegen 1, der dritte ebenso, weil $(\sqrt[2n]{2\pi})_{n\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(\sqrt[n]{2\pi})_{n\in\mathbb{N}}$ ist und diese gegen 1 geht (2.7 (c)), ebenso der vierte Faktor wegen 2.7 (c) und 2.6 (b). Daher

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} = \frac{1}{e} \tag{4.7}$$

§ 5 Tutoriumsaufgabe 39:

(a) Kleine Verbesserung: $nx^{n+2} \to 0$ und $(n+1)x^{n+1} \to 0$ folgen aus 2.7 (e).

(c) (*nach Herrn Spann*) Falls $x \neq 0$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{x}\left(e^x - 1\right) \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}) \tag{5.1}$$

Die *Indexverschiebung* rührt dabei von der Regel für die Summenschreibweise her: Die Folgen $\left(\sum_{k=0}^{n} a_{k+l}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $\left(\sum_{k=l}^{n+l} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ – „*Partialsummen*“ der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+l}$ und $\sum_{k=l}^{\infty} a_k$ – sind identisch, daher sind auch die beiden Reihen identisch und zeigen dasselbe Konvergenzverhalten. – Außerdem wurde in (5.1) folgende naheliegende Regel verwendet, die aus 2.5 (b) folgt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{l} a_k + \sum_{k=l}^{\infty} a_k \qquad \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ oder } \sum_{k=l}^{\infty} a_k \in \mathbb{R}\Big) \tag{5.2}$$

Daraus folgt für den Fall $x = 0$ auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{0} \frac{x^k}{(k+1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = \frac{0^0}{0!} + 0 = 1 \qquad (x = 0) \tag{5.3}$$

Fazit:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases} \tag{5.4}$$

(d) (*nach Herrn Spann*). Vorbetrachtungen:

$$e^x - e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k - (-x)^k}{k!} \tag{5.5}$$

$$x^k - (-x)^k = x^k - (-1)^k x^k \tag{5.6}$$

$$= \big(1 - (-1)^k\big)\, x^k = \begin{cases} 0 & (k \text{ gerade}) \\ 2x^k & (k \text{ ungerade}) \end{cases} \tag{5.7}$$

Daher müssen in (5.5) nur k der Gestalt $2n + 1$ berücksichtigt werden:

$$e^x - e^{-x} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2x^{2l+1}}{(2l+1)!} = 2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!} \tag{5.8}$$

Fazit für die Aufgabenstellung:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \tag{5.9}$$

§ 6 Bemerkung zu Tutoriumsaufgabe 42 (b) (Quotientenkriterium): Mit $a_k := \frac{k}{\alpha^k}$ erhält man

$$\left| \frac{a^{k+1}}{a^k} \right| = \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{k} \right) \tag{6.1}$$

Da $\left(\frac{1}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ Nullfolge ist, konvergiert $\left(\frac{a^{k+1}}{a^k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$, so dass

$$\frac{1}{\alpha} = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a^{k+1}}{a^k} \right| = \liminf_{k \to \infty} \left| \frac{a^{k+1}}{a^k} \right| = \limsup_{k \to \infty} \left| \frac{a^{k+1}}{a^k} \right| \tag{6.2}$$

Folgerung 3.11 (a) der Vorlesung (*Folgerung* aus dem Quotientenkriterium 3.8) liefert für $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *Konvergenz* im Fall $\alpha > 1$ und Divergenz im Fall $\alpha < 1$. Bemerkung (d) nach Definition 3.12 erklärt, dass das lim inf- bzw. lim sup-Kriterium nach 3.11 (a) für den Fall $\alpha = 1$ *nicht* zwischen Konvergenz und Divergenz unterscheidet. Jedoch liefert im vorliegenden Fall das Quotientenkriterium 3.8 (b) *direkt* Divergenz von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, da

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\colon \quad \left|\frac{a^{k+1}}{a^k}\right| > 1 \qquad \text{bei} \quad \alpha = 1 \tag{6.3}$$

§ 7 Tutoriumsaufgabe 44 Nach dem Tutorium etwas überdacht:
Für die Aufgabe sei

$$\mathbb{N}_{a,i} := \{\, am + i : m \in \mathbb{N}_0 \,\} \qquad (a \in \mathbb{N}, i \in \{1, \ldots, a\}) \tag{7.1}$$

die Menge der natürlichen Zahlen, die bei Division durch die natürliche Zahl a den Rest i ergeben, falls $i < a$, während $\mathbb{N}_{a,a}$ die Menge der durch a *teilbaren* natürlichen Zahlen ist. Es gilt

$$\mathbb{N} = \bigcup_{i\in\{1,\ldots,a\}} \mathbb{N}_{a,i} = \mathbb{N}_{a,1} \cup \cdots \cup \mathbb{N}_{a,a} \qquad (a \in \mathbb{N}) \tag{7.2}$$

d. h. jede natürliche Zahl liegt in einer dieser Mengen. Sie sind paarweise disjunkt, d. h. jede natürliche Zahl liegt in *genau* einer dieser Mengen. Aus diesem Grunde ist die Abbildung σ wohldefiniert, wenn unterschieden wird, in welcher Menge $\mathbb{N}_{4,i}$ ein Urbildelement liegt. (*So nicht vorgetragen*)

(a) Zur *Injektivität* von σ hatte ich $\sigma(k) = \sigma(k')$ in drei verschiedenen Fällen untersucht: 1. k und k' sind durch 4 teilbar; 2. k ist durch 4 teilbar, k' nicht; 3. weder k noch k' ist durch 4 teilbar. Ich hatte $k = 4m + i$ und $k' = 4m' + i'$ gesetzt mit $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Im ersten Fall folgt aus $\sigma(k) = \sigma(k')$, dass $|i - i'|$ durch 6 teilbar ist. Wegen $|i - i'| \le 3$ folgt $i = i'$ und dann auch $m = m'$, also $k = k'$. Im zweiten Fall ergibt sich aus $\sigma(k) = \sigma(k')$ der Widerspruch, dass i ungerade und gerade sein soll, d. h. der Fall kann nicht eintreten. Im dritten Fall ist $i = 4 = i'$, und aus $\sigma(k) = \sigma(k')$ folgt $2m + 2 = 2m' + 2$, also $m = m'$ und $k = k'$.

Surjektivität: 1. Ist $n \in \mathbb{N}$ gerade, so ergibt sich

$$k := 4 \cdot \left(\tfrac{n}{2} - 1\right) + 4 \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \sigma(k) = n \tag{7.3}$$

2. Sei n dagegen *ungerade*. Die Zahlen in $\mathbb{N}_{6,2} \cup \mathbb{N}_{6,4} \cup \mathbb{N}_{6,6}$ sind *gerade*, also muss n wegen (7.2) in $\mathbb{N}_{6,1} \cup \mathbb{N}_{6,3} \cup \mathbb{N}_{6,5}$ sein, d. h.

$$n = 6m + i \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad i \in \{1, 3, 5\} \tag{7.4}$$

Dann ergibt sich

$$k := 4m + \tfrac{i+1}{2} \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \sigma(k) = n \tag{7.5}$$

Fazit: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\sigma(k) = n$.

(b) (*Herrn Spanns Vorlage ausgearbeitet – nicht vorgetragen*) Wir betrachten

$$b_k := a_{\sigma(k)} \qquad (k \in \mathbb{N}) \tag{7.6}$$

$$B_m := b_{4m+1} + b_{4m+2} + b_{4m+3} + b_{4m+4} \qquad (m \in \mathbb{N}_0) \tag{7.7}$$

Zu zeigen ist, dass $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert, und zwar

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k > 1 \tag{7.8}$$

Wir betrachten zunächst $\sum_{k=0}^{\infty} B_m$:

$$\begin{aligned} B_m &= a_{6m+1} + a_{6m+3} + a_{6m+5} + a_{2m+2} && (7.9)\\ &= \frac{(-1)^{6m+2}}{6m+1} + \frac{(-1)^{6m+4}}{6m+3} + \frac{(-1)^{6m+6}}{6m+5} + \frac{(-1)^{2m+3}}{2m+2} && (7.10)\\ &= \frac{1}{6m+1} + \frac{1}{6m+3} + \frac{1}{6m+5} - \frac{1}{2m+2} && (7.11)\\ &= \frac{108m^2 + 124m + 31}{(6m+1)(6m+3)(6m+5)(2m+2)} \qquad (m \in \mathbb{N}_0) && (7.12) \end{aligned}$$

Demnach

$$B_m \geq 0 \qquad \text{und} \qquad |B_m| = B_m \qquad (m \in \mathbb{N}_0) \tag{7.13}$$

Wir schätzen den Zähler nach oben und den Nenner nach unten ab:

$$|B_m| = B_m \overset{(7.12)}{\leq} \frac{3 \cdot 108m^2}{(6m)^3 \cdot 2m} = \frac{324m^2}{432m^4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{m^2} \qquad (m \in \mathbb{N}_0) \tag{7.14}$$

Nach Bemerkung (d) zu 3.11f. der Vorlesung konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$, nach Satz 3.2 also auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4m^2} = \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$. Wegen (7.14) erfüllt $\sum_{m=1}^{\infty} B_m$ daher das Majorantenkriterium, konvergiert somit absolut. Dann konvergiert auch

$$\sum_{m=0}^{\infty} B_m = B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \overset{(7.13)}{\geq} B_0 \overset{(7.11)}{=} 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{31} > 1 \tag{7.15}$$

Wir *zeigen* jetzt

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \tag{7.16}$$

Daraus folgt dann nämlich die Behauptung (7.8) mit (7.15). Für die *Partialsummen* der beiden Reihen führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} b_k \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad S_M := \sum_{m=0}^{M} B_m \quad (M \in \mathbb{N}_0) \tag{7.17}$$

(7.16) ist damit äquivalent zu

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{M\to\infty} S_M \tag{7.18}$$

– wobei die Konvergenz von $(S_M)_{M\in\mathbb{N}_0}$ bereits gezeigt wurde und die von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ noch *zu zeigen ist.*

Zunächst gilt

$$s_{4M} = \sum_{k=1}^{4M} b_k = \sum_{m=0}^{M-1} B_m = S_{M-1} \qquad (M \in \mathbb{N}) \tag{7.19}$$

Das ist entweder „anschaulich klar“ (wenn man sich vorstellt, wie die Summen ausgeschrieben werden), oder man beweist es durch vollständige Induktion nach M:

$$s_{4\cdot 1} = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = B_0 = S_{1-1} \tag{7.20}$$

$$s_{4(M+1)} = s_{4M} + b_{4M+1} + b_{4M+2} + b_{4M+3} + b_{4M+4} \tag{7.21}$$

$$\stackrel{I.V.+(7.7)}{=} S_{M-1} + B_M = S_{(M+1)-1} \qquad (M \in \mathbb{N}_0) \tag{7.22}$$

(7.19) impliziert, dass $(S_M)_{M\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, nämlich

$$(S_M)_{M\in\mathbb{N}} = (s_{n_M})_{M\in\mathbb{N}} \qquad \text{mit} \qquad n_M = 4(M+1) \quad (M \in \mathbb{N}) \tag{7.23}$$

Damit ist bis jetzt nur klar, dass der Grenzwert von $(S_M)_{M\in\mathbb{N}_0}$ *Häufungspunkt* von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. *Zu zeigen* bleibt, dass die s_n, für die n *nicht* durch 4 teilbar ist, „nicht ausreißen“.

Wir bemühen dazu das *Cauchykriterium* – statt Satz 3.3 (Reihen) jedoch das für *Folgen* (Satz 2.28):

Es sei $\varepsilon > 0$. *Zu zeigen ist:*

$$\exists\, n^* \in \mathbb{N}\ \forall\, n, n' \geq n^*\colon\ |s_n - s_{n'}| < \varepsilon \tag{7.24}$$

Zuerst gibt es wegen der Konvergenz von $(S_M)_{M\in\mathbb{N}_0}$ ein $M_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\forall\, M', M \geq M_0\colon\ |S_M - S_{M'}| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{7.25}$$

Weiter folgt aus (7.19), (7.7) (vgl. (7.11)) und der Dreiecksungleichung für $m \in \mathbb{N}_0$:

$$|s_{4m+4} - s_{4m+4}| = 0 \tag{7.26}$$

$$|s_{4m+3} - s_{4m+4}| = |b_{4m+4}| = \frac{1}{2m+2} \tag{7.27}$$

$$|s_{4m+2} - s_{4m+4}| = |b_{4m+3} + b_{4m+4}| \tag{7.28}$$

$$\leq |b_{4m+3}| + |b_{4m+4}| = \frac{1}{6m+5} + \frac{1}{2m+2} \tag{7.29}$$

$$|s_{4m+1} - s_{4m+4}| = |b_{4m+2} + b_{4m+3} + b_{4m+4}| \tag{7.30}$$

$$\leq |b_{4m+2}| + |b_{4m+3}| + |b_{4m+4}| \tag{7.31}$$

$$\leq \frac{1}{6m+3} + \frac{1}{6m+5} + \frac{1}{2m+2} \qquad (m \in \mathbb{N}_0) \tag{7.32}$$

$$\leq \frac{1}{6m} + \frac{1}{6m} + \frac{1}{2m} = \frac{5}{6m} \leq \frac{1}{m} \qquad (m \in \mathbb{N}) \tag{7.33}$$

– insgesamt:

$$|s_{4m+i} - s_{4m+4}| \leq \frac{1}{m} \qquad (m \in \mathbb{N}, i \in \{1,2,3,4\}) \tag{7.34}$$

Dabei ist $\left(\frac{1}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ eine *Nullfolge*, daher gibt es ein $M_1 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\forall\, i \in \{1,2,3,4\}\ \ \forall\, m \geq M_1 \colon\ \ |s_{4m+i} - s_{4m+4}| \leq \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3} \tag{7.35}$$

Wir *behaupten* – und zeigen –, dass

$$n^* := 4 \cdot \max(M_0, M_1) + 4 \tag{7.36}$$

die Bedingung aus (7.24) erfüllt:

Es seien $n, n' \geq n^*$. Es gibt dann $m, m' \in \mathbb{N}_0$ und $i, i' \in \{1,2,3,4\}$ so, dass

$$n = 4m + i \qquad \text{und} \qquad n' = 4m' + i' \tag{7.37}$$

Es folgen

$$4m + i \geq n^* \geq 4M_0 + 4 \tag{7.38}$$
$$4(m - M_0) \geq 4 - i \geq 0 \tag{7.39}$$
$$m \geq M_0 \tag{7.40}$$

Analog folgen

$$m \geq M_1 \qquad m' \geq M_0 \qquad m' \geq M_1 \tag{7.41}$$

Aus (7.25), (7.19), (7.35) und der Dreiecksungleichung folgt daher

$$\begin{aligned}
|s_n - s_{n'}| &= |s_{4m+i} - s_{4m'+i'}| \\
&= |(s_{4m+i} - s_{4m+4}) + (s_{4m+4} - s_{4m'+4}) + (s_{4m'+4} - s_{4m'+i'})| \\
&\leq |s_{4m+i} - s_{4m+4}| + |s_{4m+4} - s_{4m'+4}| + |s_{4m'+4} - s_{4m'+i'}| \\
&< \tfrac{\varepsilon}{3} + |S_m - S_{m'}| + \tfrac{\varepsilon}{3} < \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned} \tag{7.42}$$

$(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ist somit gemäß (7.24) *Cauchyfolge*, konvergiert also. Da $(S_M)_{M\in\mathbb{N}}$ *Teilfolge* von $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ist, haben nach Folgerung 2.17 (a) beide denselben Grenzwert. Aus (7.16) und (7.15) folgt daher die Behauptung (7.8).