Analysis für Informatiker und Statistiker
Dr. Walter Spann, LMU, Wintersemester 2009/10

Nachträge zum Tutorium (II)

Uwe Lück,[1] 15. Februar 2010

§ 1 Transitivität und Antisymmetrie von ≤ etc.

Ein Axiom der Prädikatenlogik mit Identität ist

$$\mathcal{A}(x) \;\wedge\; x = y \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{A}(y) \qquad (x \text{ was auch immer}) \tag{1.1}$$

Ein Anwendungsbeispiel davon ist

$$x < y \;\wedge\; y = z \quad\Longrightarrow\quad x < z \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}) \tag{1.2}$$

Wir verwenden die „***Relationsketten***“-Schreibweise, um $\wedge$-Zeichen und Wiederholungen von Termen zu sparen. (1.2) sieht dann so aus:

$$x < y = z \quad\Longrightarrow\quad x < z \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}) \tag{1.2$'$}$$

Aus den Definitionen von $\leq$, $\geq$ und $<$ in 1.8 der Vorlesung folgt unmittelbar

$$x \leq y \quad\Longleftrightarrow\quad x < y \;\vee\; x = y \qquad (x, y \in \mathbb{R}) \tag{1.3}$$

Die ***Transitivität von*** $<$ besteht in

$$x < y < z \quad\Longrightarrow\quad x < z \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}) \qquad \text{Rechenregel 1.9 (a)}$$

Aus (1.2), Rechenregel 1.9 (a) und der Transitivität von $<$ (1.9 (a)) folgt

$$x < y \leq z \quad\Longrightarrow\quad x < z \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}) \tag{1.4}$$

– und zwar so: Seien $x < y, z \in \mathbb{R}$. Gilt $y < z$, so folgt $x < z$ aus der Transitivität von $<$. Gilt $y = z$, so folgt $x < z$ aus (1.1) bzw. (1.2) … Auf ungefähr dieselbe Weise folgt aus (1.4) die Transitivität von $\leq$:

$$x \leq y \leq z \quad\Longrightarrow\quad x \leq z \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}) \tag{1.5}$$

[1] `http://www.webdesign-bu.de/uwe_lueck/tutor.html`

Aus (1.1) folgt auch die Transitivität der Identität:

$$x = y = z \quad \Longrightarrow \quad x = z \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}) \tag{1.6}$$

Insgesamt ergibt sich: Aus einer „Relationskette“ $x \cdots z$ mit Relationen aus $\{=, \leq, <\}$ folgt $x \leq z$; kommt dabei mindestens ein $<$ vor, so folgt sogar $x < y$.

Ähnlich wie (1.4) ergibt sich die Variante

$$x \geq y \;\wedge\; a \geq b \quad \Longrightarrow \quad x + a \geq y + a \qquad (x, y, a \in \mathbb{R}) \tag{1.7}$$

von

$$x > y \quad \Longleftrightarrow \quad x + a > y + a \qquad (x, y, a \in \mathbb{R}) \qquad \text{Rechenregel 1.9 (b)}$$

sowie die Variante

$$x \geq y \;\wedge\; a \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \cdot a \geq y \cdot a \qquad (x, y, a \in \mathbb{R}) \tag{1.8}$$

von

$$x > y \;\wedge\; a > 0 \quad \Longrightarrow \quad x \cdot a > y \cdot a \qquad (x, y, a \in \mathbb{R}) \quad \text{Rechenregel 1.9 (c)}$$

Darüber hinaus lässt sich der Beweis von

$$x^2 > 0 \qquad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{Rechenregel 1.9 (d)}$$

leicht zu einem Beweis von

$$x < 0 \;\wedge\; y < 0 \quad \Longrightarrow \quad x \cdot y > 0 \qquad (x, y \in \mathbb{R}) \tag{1.9}$$

verallgemeinern, und wie zuvor gilt damit auch

$$x \leq 0 \;\wedge\; y \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \cdot y \geq 0 \qquad (x, y \in \mathbb{R}) \tag{1.10}$$

Weitere ***transitive Relationen*** sind die Teilmengenbeziehungen („$\subset$“ für *echte* Teilmengen, „$\subseteq$“ für *„Teilmenge von oder identisch mit“ – in der Vorlesung wird „$\subset$“ dafür geschrieben!*) zwischen Mengen und die Folgerungsbeziehungen „$\Longrightarrow$“ und „$\Longleftrightarrow$“ zwischen Aussagen (oder auch *Aussagenformen*, wenn man nur Formeln *ohne freie Variablen* als *„Aussagen“* bezeichnen möchte).

Mit $\subseteq$ teilt sich $\leq$ auch die ***Antisymmetrie:*** Nach 0.5 der Vorlesung gilt für Mengen A, B:

$$A \subseteq B \subseteq A \iff A = B \qquad \text{Folgerung 0.5}$$

Analog gilt

$$x \leq y \leq x \iff x = y \qquad (x, y \in \mathbb{R}) \tag{1.11}$$

„$\Longleftarrow$“ folgt unmittelbar aus (1.3). Die umgekehrte Richtung folgt aus dem ersten Anordnungsaxiom der Vorlesung:

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:

$$x < 0, \quad x = 0, \quad x > 0. \tag{A1}$$

Aus $x \leq y \leq x$ folgt mit (1.3) formal

$$(x < y \;\wedge\; x > y) \;\vee\; (x < y \;\wedge\; x = y) \;\vee\; (x = y \;\wedge\; x > y) \;\vee\; (x = y \;\wedge\; x = y) \tag{1.12}$$

$x < y$ ist nach Definition 1.8 äquivalent zu $x - y < 0$, $x > y$ zu $x - y > 0$, und $x = y$ ist äquivalent zu $x - y = 0$. Daher schließt (A1) die linken drei Konjunktionen in (1.12) aus, es folgt $x = y$. Damit ist „$\Rightarrow$“ von (1.11) bewiesen.

§ 2 Tutoriumsaufgabe 24. Gegeben sind lipschitzstetige Abbildungen $f, g : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. (In der Vorlesung wird dafür „$I \subset \mathbb{R}$" geschrieben!)

Demnach können wir uns zu allen Aufgabenteilen auf Lipschitzkonstanten L für f und M für g beziehen, d. h.

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2| \qquad (x_1, x_2 \in \mathbb{R}) \tag{2.1}$$

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq M \cdot |x_1 - x_2| \qquad (x_1, x_2 \in \mathbb{R}) \tag{2.2}$$

Ich folge Herrn Spanns Vorlage.

(a) Es sei $h : I \to \mathbb{R}$ durch $h(x) = f(x) - g(x)$ definiert. (Man findet die Bezeichnung $f - g$ für eine derart definierte Funktion.) Mit der ***Dreiecksungleichung*** in der Form von 1.12 (a) der Vorlesung sowie (2.1) und (2.2) folgt

$$\begin{aligned}
|h(x_1) - h(x_2)| &= |(f(x_1) - g(x_1)) - (f(x_2) - g(x_2)| && (2.3)\\
&= |(f(x_1) - f(x_2)) - (g(x_1) - g(x_2)| && (2.4)\\
&\overset{1.12a}{\leq} |f(x_1) - f(x_2)| + |-(g(x_1) - g(x_2))| && (2.5)\\
&\overset{1.11a}{=} |f(x_1) - f(x_2)| + |g(x_1) - g(x_2)| && (2.6)
\end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (2.1), (2.2) und (1.8) des vorliegenden Dokuments folgt damit

$$\begin{aligned}
|h(x_1) - h(x_2)| &\leq L \cdot |x_1 - x_2| + M \cdot |x_1 - x_2| && (2.7)\\
&= (L + M) \cdot |x_1 - x_2| && (2.8)
\end{aligned}$$

$h = f - g$ ist also lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $L + M$.

(b) J ist ein *beschränktes* Teilintervall von I. ($J = I$ ist nicht ausgeschlossen, wenn bereits I beschränkt ist.) h sei in diesem Aufgabenteil als Funktion $J \to \mathbb{R}$ durch $h(x) = x \cdot f(x)$ definiert (könnte man als $\mathrm{id}_J \cdot f\big|_J$ bezeichnen).

Nach Bemerkung (b) zur Definition 1.21 der Lipschitzstetigkeit ist die Einschränkung von f auf J *beschränkt*, d. h. es gibt ein $M_J \in \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) \leq M_J \cdot f(x) \qquad (x \in J) \tag{2.9}$$

Beschränktheit von J bedeutet zudem, dass es ein $R > 0$ gibt, so dass

$$-R \leq x \leq R \qquad (x \in J) \tag{2.10}$$

also

$$|x| \leq R \qquad (x \in J) \tag{2.11}$$

und für $x_1, x_2 \in J$:

$$\begin{aligned}
|h(x_1) - h(x_2)| &= |x_1 \cdot f(x_1) - x_2 \cdot f(x_2)| && (2.12)\\
&= |(x_1 - x_2)f(x_1) + x_2(f(x_1) - f(x_2))| && (2.13)\\
&\overset{1.12a}{\leq} |(x_1 - x_2)f(x_1)| + |x_2(f(x_1) - f(x_2))| && (2.14)\\
&\overset{1.11c}{=} |x_1 - x_2| \cdot |f(x_1)| + |x_2| \cdot |f(x_1) - f(x_2)| && (2.15)\\
& && (2.16)
\end{aligned}$$

Mit (2.9), (2.11), (1.7) und (2.1) folgt

$$|h(x_1) - h(x_2)| \le |x_1 - x_2| \cdot M_J + R \cdot |f(x_1) - f(x_2)| \tag{2.17}$$
$$\le |x_1 - x_2| \cdot M_J + R \cdot L \cdot |x_1 - x_2| \tag{2.18}$$
$$= (M_J + RL) \cdot |x_1 - x_2| \tag{2.19}$$

h ist also lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $M_J + RL$.

(c) Aus (2.1) und der Version 1.12 (b) der ***Dreiecksungleichung*** folgt für $x_1, x_2 \in I$

$$\Big||f(x_1)| - |f(x_2)|\Big| \le |f(x_1) - f(x_2)| \le L \cdot |x_1 - x_2| \tag{2.20}$$

Daher ist auch die durch $h(x) = |f(x)|$ definierte Funktion $I \to \mathbb{R}$ lipschitzstetig mit derselben Lipschitzkonstante L wie f.

§ 3 Tutoriumsaufgabe 25 (*nach Herrn Spann*). Mit

$$G_k(n) := \binom{n+k}{k} 2^{-k} \qquad (k \le n \in \mathbb{N}_0) \tag{3.1}$$

ist zu zeigen:

$$S(n) := \sum_{k=0}^{n} G_k(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} 2^{-k} = 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{3.2}$$

Induktionsanfang $S(0) = 1 = 2^0$ OK, Induktionsschritt:

$$S(n+1) = \sum_{k=0}^{n+1} G_k(n+1) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1+k}{k} 2^{-k} \tag{3.3}$$
$$= \sum_{k=0}^{0} \binom{0+k}{k} 2^{-k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1+k}{k} 2^{-k} \tag{3.4}$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \left[\binom{n+k}{k} + \binom{n+k}{k-1} \right] 2^{-k} \tag{3.5}$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+k}{k} 2^{-k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+k}{k-1} 2^{-k} \tag{3.6}$$
$$= \sum_{k=0}^{0} \tbinom{0+k}{k} 2^{-k} + \sum_{k=1}^{n+1} G_k(n) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k+1}{k} 2^{-(k+1)} \tag{3.7}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} G_k(n) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k+1}{k} 2^{-k} \tag{3.8}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} G_k(n) + \tfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{n+1} \tbinom{n+k+1}{k} 2^{-k} - \tfrac{1}{2} \tbinom{2n+2}{n+1} 2^{-(n+1)} \tag{3.9}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} G_k(n) + \tfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{n+1} \tbinom{(n+1)+k}{k} 2^{-k} - \tfrac{1}{2} \tbinom{2n+2}{n+1} 2^{-(n+1)} \tag{3.10}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} G_k(n) + \tfrac{1}{2} S(n+1) - \tfrac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1} 2^{-(n+1)} \tag{3.11}$$

Somit

$$\tfrac{1}{2}\,S(n+1) = \sum_{k=0}^{n+1} G_k(n) - \binom{2n+2}{n+1} 2^{-(n+2)} \tag{3.12}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n+k}{k} 2^{-k} + \tbinom{2n+1}{n+1} 2^{-(n+1)} - \tbinom{2n+2}{n+1} 2^{-(n+2)} \tag{3.13}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} G_k(n) + \tbinom{2n+1}{n} 2^{-(n+1)} - \tfrac{2n+2}{n+1} \tbinom{2n+1}{n} 2^{-(n+2)} \tag{3.14}$$

$$= S(n) + \binom{2n+1}{n} 2^{-(n+1)} - 2 \cdot \binom{2n+1}{n} 2^{-(n+2)} \tag{3.15}$$

$$= S(n) + \binom{2n+1}{n} 2^{-(n+1)} - \binom{2n+1}{n} 2^{-(n+1)} \tag{3.16}$$

$$= S(n) \tag{3.17}$$

Mit der Induktionsvoraussetzung $S(n) = 2^n$ folgt daher

$$S(n+1) = 2 \cdot S(n) = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \tag{3.18}$$

wie gewünscht.

§ 4 Beschränktheit und Lipschitzstetigkeit (Aufgaben 26 und 27). Das folgende ergänzt ein wenig, was ich inhaltlich im 7. Tutorium (2009-12-11) vorgetragen/an die Tafel geschrieben habe, und das Vorlesungsskriptum.

$K \subseteq \mathbb{R}$ heißt ***beschränkt***, wenn es eine reelle Zahl (*Schranke*) $M > 0$ (äquivalent: $M \geq 0$, aber auch: $M \in \mathbb{R}$) gibt, so dass $|x| < M$ für alle $x \in K$ gilt. (Daneben gibt es den Begriff *oberer* und *unterer* Schranken von Mengen, die dann auch *kleiner* als 0 sein können: $[-2, -1[$ hat Schranke 2, untere Schranke -2, obere Schranke -1.)

Beschränkte Intervalle sind damit tatsächlich beschränkte Mengen. Eine reellwertige *Funktion* $f : X \to \mathbb{R}$ ist genau dann beschränkt, wenn ihre *Bildmenge* $f(X)$ beschränkt ist. Da *Folgen* (reeller Zahlen) derartige Funktionen sind (z. B. mit $X = \mathbb{N}$), folgt,[2] dass eine Folge $(a_n)_{n \geq N}$ $(N \in \mathbb{Z})$ genau dann beschränkt ist, wenn die *Menge* $\{\, a_n : n \geq N \,\}$ *ihrer Glieder* beschränkt ist.

Für eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit $I \subseteq \mathbb{R}$ sei

$$S_f := \left\{ \left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| : x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2 \right\} \tag{4.1}$$

(die Menge der *„Steigungsbeträge“* von f).

Offenbar[3] ist f genau dann *lipschitzstetig*, wenn S_f *beschränkt* ist – jede *Schranke* von S_f ist *Lipschitzkonstante* von f und umgekehrt:

$$\forall x_1, x_2 \in I\colon\ |f(x_1) - f(x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2| \iff \forall s \in S_f : s \leq L \tag{4.2}$$

– für alle $L \in [0, \infty[$.[4]

[2] … falls man es nicht eh’ schon weiß …

[3] Es gehen 1.9 (c) 1.11 (d) und Rechenregeln für Brüche aus der Vorlesung ein.

[4] Damit (4.2) auch für einelementiges I gilt, darf man nun, anders als oben angedeutet, keine negativen *„Schranken“* L zulassen, die ja auch $S_f = \emptyset$ „beschränken“ würden.

Tutoriumsaufgabe T27 (c): Die *Quadratwurzelfunktion* $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ist *nicht lipschitzstetig* (angekündigt in der zweiten Bemerkung zu Satz 1.24 der Vorlesung): Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$n = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \left| \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}} - \sqrt{0}}{\frac{1}{n^2} - 0} \right| = \left| \frac{f(\frac{1}{n^2}) - f(0)}{\frac{1}{n^2} - 0} \right| \in S_f \tag{4.3}$$

d. h. $\mathbb{N} \subseteq S_f$. Das *Archimedische Axiom* (A4) der Vorlesung besagt gerade, dass $\mathbb{N}$ *nicht beschränkte* Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist – durch Negieren der innersten Teilformel und Voranstellen eines weiteren $\neg$ (doppelte Verneinung) erhält man folgende äquivalente Fassung:

$$\neg\, \exists x \in \mathbb{R}\; \forall n \in \mathbb{N} \colon n \le x \tag{4.4}$$

Jede Teilmenge einer beschränkten Menge ist beschränkt (Definition von „Teilmenge“ in 0.4 (b) der Vorlesung), daher überträgt sich die *Unbeschränktheit* von $\mathbb{N}$ auf die Obermenge S_f. Wegen (4.2) ist die Quadratwurzelfunktion f auf $[0, \infty[$ somit nicht lipschitzstetig.

(***Vorsicht:*** *Was ich hier schreibe, stimmt zwar, ist aber nicht Vorlesungsstoff, und ich weiß nicht, ob alle Korrektoren das akzeptieren – besonders fraglich hinsichtlich Terminologie. Sollte aber fürs Verständnis nützlich sein.*)

Auflösung zu Aufgabe 27 (b), *meine* Version: Obiges verallgemeinernd ist mit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ wieder für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$n = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^k}} = \frac{\sqrt[k]{\left(\frac{1}{n}\right)^k}}{\frac{1}{n^k}} = \left| \frac{\sqrt[k]{\frac{1}{n^k}} - \sqrt[k]{0}}{\frac{1}{n^k} - 0} \right| = \left| \frac{f(\frac{1}{n^k}) - f(0)}{\frac{1}{n^k} - 0} \right| \in S_f \tag{4.5}$$

und somit $\mathbb{N} \subseteq S_f$ usw. (Vielleicht sollte man noch auf $\left(\frac{1}{x}\right)^k = \frac{1}{x^k}$ achten, was durch vollständige Induktion aus $\frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$ folgt.)

§ 5 Tutoriumsaufgabe 28 (*Herrn Spanns Instruktionen geTEXt*).

(a) kam in den letzten Minuten schon auf die Tafel. Die Tatsache, dass 2 und 3 dieselbe Gleichung

$$x^2 = 5x - 6 \tag{5.1}$$

erfüllen, ermöglicht Anwendungen eines Distributivgesetzes, um zu zeigen, dass die durch

$$a_n = 2^n + 3^n \tag{5.2}$$

definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Rekursionsgleichung

$$a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1} \tag{5.3}$$

erfüllt (man beachte die „Bewegungen“ von 5 und 6):

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &\overset{(5.2)}{=} 2^{n+1} + 3^{n+1} = 2^{n-1} \cdot 2^2 + 3^{n-1} \cdot 3^2 && (5.4)\\
&\overset{(5.1)}{=} 2^{n-1} \cdot (5 \cdot 2 - 6) + 3^{n-1} \cdot (5 \cdot 3 - 6) && (5.5)\\
&= 5 \cdot 2^n - 6 \cdot 2^{n-1} + 5 \cdot 3^n - 6 \cdot 3^{n-1} && (5.6)\\
&= 5 \cdot (2^n + 3^n) - 6 \cdot (2^{n-1} + 3^{n-1}) && (5.7)\\
&\overset{(5.2)}{=} 5a_n - 6a_{n-1} && (5.8)
\end{aligned}$$

d. h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gemäß (5.2) erfüllt (5.3), wie in der Aufgabe verlangt.

(b) (5.3) wird nun verallgemeinert und erweitert zu den Rekursionsgleichungen

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 5x_n - 6x_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{5.9}$$

Die Festsetzungen für x_0 und x_1 sind also anders als in (a). Die Situation von (5.2) wird verallgemeinert zum Ansatz

$$x_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{5.10}$$

um die Lösung von (5.9) zu bestimmen:

$$0 = x_0 = A \cdot 2^0 + B \cdot 3^0 = A + B \qquad \Longrightarrow\ B = -A \tag{5.11}$$
$$1 = x_1 = A \cdot 2^1 + B \cdot 3^1 = 2A + 3B \tag{5.12}$$
$$= 2A - 3A = -A \qquad \Longrightarrow\ A = -1 \ \wedge\ B = 1 \tag{5.13}$$

Das bedeutet: die *Vermutung*, die Lösung von (5.9) hätte die Form (5.10), führt mit den „Anfangsbedingungen“ $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ zum Versuch

$$x_n = b_n := A \cdot 2^n + B \cdot 3^n = 3^n - 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{5.14}$$

der jedenfalls die beiden Anfangsbedingungen erfüllt. Zu prüfen bleibt, ob er auch der Bedingung für x_{n+1} aus (5.9) genügt, die in Teil (a) schon von (5.2) erfüllt wurde. Der Nachweis verläuft völlig analog zu dort:

$$b_{n+1} \overset{(5.14)}{=} 3^{n+1} - 2^{n+1} = 3^{n-1} \cdot 3^2 - 2^{n-1} \cdot 2^2 \tag{5.15}$$
$$\overset{(5.1)}{=} 3^{n-1} \cdot (5 \cdot 3 - 6) - 2^{n-1} \cdot (5 \cdot 2 - 6) \tag{5.16}$$
$$= 5 \cdot 3^n - 6 \cdot 3^{n-1} - 5 \cdot 2^n - 6 \cdot 2^{n-1} \tag{5.17}$$
$$= 5 \cdot (3^n - 2^n) - 6 \cdot (3^{n-1} - 2^{n-1}) \tag{5.18}$$
$$\overset{(5.14)}{=} 5b_n - 6b_{n-1} \tag{5.19}$$

Die durch $b_n = 3^n - 2^n$ definierte Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist also die eindeutig bestimmte Lösung der Rekursionsgleichungen (5.9).

(c) Für die Lösung $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von (5.9) gilt zunächst

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{3^n - 2^n} = \frac{3^{n+1}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{3^n\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)} = 3 \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} \tag{5.20}$$

Das Rezept ist hier *Ausklammern des dominierenden Terms* (3^{n+1} bzw. 3^n), der mit n (dem Absolutbetrag nach) am stärksten wächst. Dies führt zum Erkennen von konvergenten Teiltermen (d. h. Teiltermen, die die Glieder einer konvergenten Folge darstellen): Nach 2.7 (e) der Vorlesung ist $\left(n^k q^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ *Nullfolge.* Mit $k = 0$ und $q = \frac{2}{3}$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^n = 0 \tag{5.21}$$

Mit Rechenregel 2.5 (c) (Produkte, zusammen mit Beispiel (a) zu Satz 2.3 – *konstante* Folge) der Vorlesung folgt aus (5.21)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{2}{3} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n} = \tfrac{2}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n} = 0 \tag{5.22}$$

Alternativ lässt sich (5.22) aus (5.21) mit der allgemeineren Überlegung folgern, dass Folgen, die ab bestimmten Indizes übereinstimmen, denselben Grenzwert haben – er existiert auch entweder für beide oder für keine: Sind $(a_k)_{k\geq K}$ und $(b_l)_{l\geq L}$ Folgen und gilt für gewisse $K' \geq K$ und $L' \geq L$, dass

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : a_{K'+k} = b_{L'+k} \tag{5.23}$$

so konvergieren entweder $(a_k)_{k\geq K}$ und $(b_k)_{l\geq L}$ gegen denselben Wert, oder keine von beiden ist konvergent. (Dies ist ganz einfach aus der Definition der Konvergenz herleitbar.) In (5.21) und (5.22) haben wir davon den Spezialfall $K = K' = L = 0$, $L' = 1$, $a_k = \left(\tfrac{2}{3}\right)^n$ und $b_k = \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n+1}$.

Nun „sieht“ man aus (5.20) schon

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \longrightarrow \quad 3 \cdot \frac{1-0}{1-0} = 3 \tag{5.24}$$

Sorgfältiger: Mit Beispiel (a) (*konstante* Folge) zu Satz 2.3 und Rechenregel 2.5 (b) (Summen) der Vorlesung folgt aus (5.21)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n} = 1 - 0 = 1 \tag{5.25}$$

und aus (5.22) folgt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n+1} = 1 \tag{5.26}$$

Mit Rechenregel 2.5 (d) (Brüche) folgt aus (5.26) und (5.25)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n}} = 1 \tag{5.27}$$

Wieder mit 2.5 (c) (Produkte) folgt aus (5.20) und (5.27)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 3 \cdot 1 = 1 \tag{5.28}$$

– zur Bestätigung von (5.24).

§ 6 Tutoriumsaufgabe 29 (b).

Kleine Korrektur, kleine Ergänzung:

1.) Statt der Aufgabenstellung

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{8^n - 1}}{2^n + n} \tag{6.1}$$

(so hatte ich sie auch angeschrieben) hatte ich

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{8^n - 1}}{2^n + 1} \tag{6.2}$$

vorbereitet und behandelt („+ 1“ statt „+ n“ im *Nenner*). Das Ergebnis ist dasselbe. Beim Kürzen mit 2^n entsteht $\frac{n}{2^n}$ statt $\frac{1}{2^n}$. Wie letztere ist auch die vorige Folge eine Nullfolge, statt auf 2.7 (a) der Vorlesung muss dazu auf 2.7 (e) mit $k = 1$ und $q = \frac{1}{2}$ Bezug genommen werden.

2.) Zum *Zähler* konnte ich

$$\frac{1}{2^n} = \sqrt[3]{\frac{1}{8^n}} \tag{6.3}$$

nicht begründen. Na ja, aus 1.24 (b) („Wurzel-Ziehen kehrt Potenzieren um“) und

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0 \neq d) \qquad (\textit{Tutoriumsaufgabe 13})$$

folgt

$$\frac{1}{2^n} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2^n}\right)^3} = \sqrt[3]{\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2^{3n}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{(2^3)^n}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8^n}} \tag{6.4}$$

Dabei ist

$$(2^n)^3 = \underbrace{2 \cdots 2}_{3n\text{-mal}} = 2^{3n} = (2^3)^n \tag{6.5}$$

„anschaulich klar“, und wenn ich Bedenken dazu anmelde, habe ich den Vorwurf der „Haarspalterei“ zu fürchten ...

§ 7 Übungs-/Tutoriumsaufgabe 32 (arithmet./geometr. Mittel).

Im Tutorium am 18. Dezember hatte ich die Aufgabe mit gewissem „***formalem Brimborium***“ dargestellt.[5] *Hier* versuche ich es erst mal mit weniger. *Außerdem* trage ich nach, wie Herr Spann mir *nach* meinem Tutorium seine Vorlage erklärt hat.

In Übungsaufgabe 32 soll bewiesen werden:

1. für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a_1, \ldots, a_n \in [0; \infty[$ gilt

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \tag{7.1}$$

2. für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a_1, \ldots, a_n \in [0; \infty[$ gilt (*Gleichheit* in (7.1))

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 = \cdots = a_n \tag{7.2}$$

Der Beweis beider Behauptungen soll *schrittweise* vorgehen. Übungsaufgabe 32 (a) beschränkt sich auf $n = 2$. Die Tutoriumsaufgabe 32 (b) schließt von den beiden Behauptungen für $n = 2$ aus Übungsaufgabe 32 (a) auf die beiden Behauptungen für $n = 4$. Tutoriumsaufgabe 32 (c) schließt von den beiden Behauptungen für $n = 4$ aus Tutoriumsaufgabe 32 (b) auf die beiden Behauptungen für $n = 3$.

[5] Die „*Publikums-Stichprobe*“ betrug $n = 1$.

(a) T32 (a) $\left(\sqrt{x} \le \frac{1+x}{2}\text{ etc.}\right)$ habe ich im Tutorium hinreichend erklärt.

(b) „$\le$": Aus 1.24 (Eigenschaften der Wurzelfunktionen) und 0.25 (Umkehrabbildung bei Verkettung)[6] folgt

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{abcd}} = \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} \tag{7.3}$$

Nach Übungsaufgabe 32 (a) (die hier hier vorausgesetzt wird) gilt

$$\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2} \tag{7.4}$$

Mit der strengen Monotonie der Wurzelfunktionen gemäß 1.24 (c), drei Anwendungen von (7.4) sowie den Rechenregeln (1.7) und (1.8) (vorliegendes Dokument) für $\le$ folgt

$$\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} \le \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \tag{7.5}$$

$$\le \frac{\frac{a+b}{2}+\sqrt{cd}}{2} \le \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} = \frac{a+b+c+d}{4} \tag{7.6}$$

Damit ist die *Ungleichheit* des arithmetischen und des geometrischen Mittels von 4 Zahlen bewiesen (bzw. aus der für 2 Zahlen gefolgert).

Nun zur *Gleichheit:* Aus $a = b = c = d$ folgt

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt[4]{a^4} = a = \frac{4a}{4} = \frac{a+b+c+d}{4} \tag{7.7}$$

Umgekehrt gelte $\sqrt[4]{abcd} = \frac{a+b+c+d}{4}$. Wegen der *Antisymmetrie* von $\le$ – siehe (1.11) und den Beweis dort – und (7.3) gilt dann *Gleichheit* an Stelle des $\le$ in (7.5) und (7.6). Aus der Gleichheit in (7.6) folgen

$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \qquad \text{und} \qquad \frac{c+d}{2} = \sqrt{cd} \tag{7.8}$$

Nach Übungsaufgabe 32 (a) gilt

$$\sqrt{xy} = \frac{x+y}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = y \tag{7.9}$$

Aus (7.8) folgen daher

$$a = b \qquad \text{und} \qquad c = d \tag{7.10}$$

Aus der Gleichheit in (7.5) und (7.9) folgt damit

$$a = \sqrt{a^2} = \sqrt{ab} = \sqrt{cd} = \sqrt{c^2} = c \tag{7.11}$$

insgesamt also

$$b = a = c = d \tag{7.12}$$

[6] Bezeichnungen: $q, \bar{q}, r, \bar{r} : [0;\infty[\to [0;\infty[$, $q(x) = x^2$, $\bar{q}(x) = x^4$, $r(x) = \sqrt{x}$, $\bar{r}(x) = \sqrt[4]{x}$. $r = q^{-1}$, $\bar{r} = \bar{q}^{-1}$, $\bar{q} = q \circ q$, daher $\bar{r} = r \circ r$. Außerdem $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$.

wie behauptet.

Alternative: In Herrn Spanns Vorlage konnte ich nur erkennen, wie man aus $\sqrt[4]{abcd} = \frac{a+b+c+d}{4}$ auf $\sqrt{ab} = \sqrt{bd}$ schließt,[7] woraus $ab = cd$ folgt. Ich bin trotzdem durchgekommen (das hatte ich im Tutorium erklärt): Aus $\sqrt[4]{abcd} = \frac{a+b+c+d}{4}$ folgt auch $\sqrt[4]{acbd} = \frac{a+c+b+d}{4}$ und analog zu vorher $ac = bd$, ebenso $ad = bc$. Aus $ab = cd$ und $ac = bd$ folgt $\frac{ab}{ac} = \frac{cd}{bd}$ (nun ja, man muss $0 \in \{a, b, c, d\}$ separat behandeln wie in Aufgabenteil (c)), damit $\frac{b}{c} = \frac{c}{b}$, $b^2 = c^2$ und $b = c$. Aus $ab = cd$ und $ad = bc$ folgt analog $b = d$. Aus $ac = bd$ und $ad = bc$ folgt schließlich $\frac{ac}{bc} = \frac{bd}{ad}$ und damit $a = b$. So haben wir $a = b = c = d$ zusammen.

(c) *Zunächst* ergibt sich

$$a = b = c \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[3]{abc} = \frac{a+b+c}{3} \tag{7.13}$$

analog zu (7.7).

Falls $a = 0 \ \vee \ b = 0 \ \vee \ c = 0$, so ist die linke Seite von

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \tag{7.14}$$

0, so dass die Ungleichung trivialerweise gilt. Gilt sogar

$$\sqrt[3]{abc} = \frac{a+b+c}{3} \tag{7.15}$$

so folgt $0 = \frac{a+b+c}{3}$, also $0 = a = b = c$.

Falls hingegen $a, b, c > 0$ so

$$\frac{a+b+c}{3} > 0 < \frac{3}{a+b+c} \tag{7.16}$$

und wegen (1.8) der Injektivität der Wurzelfunktionen (Vorlesung 1.24 (c)) bestehen folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \quad &\Longleftrightarrow \quad abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 && (7.17)\\
&\Longleftrightarrow \quad abc \cdot \frac{a+b+c}{3} \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 && (7.18)\\
&\Longleftrightarrow \quad \sqrt[4]{abc \cdot \frac{a+b+c}{3}} \leq \frac{a+b+c}{3} && (7.19)
\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{\frac{4}{3}(a+b+c)}{4} = \frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} \tag{7.20}$$

Daher liegt die Situation von Aufgabenteil (b) ($n = 4$) mit $d = \frac{a+b+c}{3}$ vor:

$$\sqrt[4]{abc \cdot \frac{a+b+c}{3}} \leq \frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} \tag{7.21}$$

[7] Der Zwischenschritt mit $\frac{a+b}{2} + \sqrt{cd}$ war nicht explizit angegeben.

(7.14) folgt somit aus (7.21), (7.20) und (7.19).

Die Äquivalenz (7.19) besteht auch, wenn man $\leq$ durch $=$ ersetzt. Gilt also die Gleichheit (7.15), so folgt $a = b = c$ aus den Gleichheitsversionen von (7.21) – diese folgt wieder wegen Aufgabenteil (a) – und von (7.19) zusammen mit (7.20).

Mit formalem Brimborium: Das formale Brimborium ging so: Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ sind das arithmetische Mittel A_n und das geometrische Mittel G_n Funktionen $[0, \infty[^n \to [0, \infty[$ (für das arithmetische Mittel gilt das nur innerhalb der Aufgabe). Ob das Abkürzungen sind, ist zweifelhaft, aber man sieht damit vielleicht klarer, was passiert: Die Argumentation beruht auf

$$A_4(a, b, c, d) = A_2(A_2(a, b), A_2(c, d)) \tag{7.22}$$

$$G_4(a, b, c, d) = G_2(G_2(a, b), G_2(c, d)) \tag{7.23}$$

$$A_3(a, b, c) \geq G_3(a, b, c) \iff A_4(a, b, c, A_3(a, b, c)) \geq G_4(a, b, c, A_3(a, b, c)) \tag{7.24}$$

$$A_3(a, b, c) = G_3(a, b, c) \iff A_4(a, b, c, A_3(a, b, c)) = G_4(a, b, c, A_3(a, b, c)) \tag{7.25}$$