Analysis für Informatiker und Statistiker
Dr. Walter Spann, LMU, Wintersemester 2009/10

Nachtrag und „Repetitorium" zu Quantoren und Paaren

(Übungsaufgaben 5 und 7; „Weihnachtstutorium"[1])

Uwe Lück,[2] 27. November 2009

§1 Gegenbeispiel zu Aufgabe 5 (b) – alternativ zu dem in Herrn Jaskollas Lösungen (Grundidee aus Herrn Spanns Tutoriumsvorlage und einer Übungsbearbeitung):

Fraglich (I Indexmenge, A_i, B_i für $i \in I$ Mengen):

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \overset{!?}{=} \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B_i) \tag{1}$$

Wir gehen zum Spezialfall $I := \{1, 2\}$ über. Die fragliche Gleichung (1) ist dann äquivalent zu

$$(A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2) \overset{!?}{=} (A_1 \cup B_1) \cap (A_2 \cup B_2) \tag{2}$$

Mit

$$A_1 := \{1\} =: B_2 \qquad \text{und} \qquad A_2 := \{2\} =: B_1 \tag{3}$$

ist die linke Seite von (2) die leere Menge $\emptyset$ (denn $A_1 \cap A_2 = \emptyset = B_1 \cap B_2$), die rechte ist dagegen die Menge $\{1, 2\}$ (denn $A_1 \cup B_1 = \{1, 2\} = A_2 \cup B_2$).

§2 Nachlässigkeit bei Aufgabe 7 im Tutorium: Die der Übungsaufgabe entsprechende *Tutorium*saufgabe 7 forderte den Beweis von

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \tag{4}$$

für Mengen A, B, C. Den Beweis führte ich (aus Gewohnheit und auch wegen der Vorlage) etwas nachlässig nach dem Muster

$$(x, y) \in l.\,S. \iff \cdots \iff (x, y) \in r.\,S. \tag{5}$$

Eventuell habe ich dadurch Punktabzüge verschuldet, *tut mir leid.*

Sorgfältiger gingen einige *BearbeiterInnen* von Übungsaufgabe 7 (a) und Herr *Jaskolla* in der Musterlösung ungefähr nach folgendem Muster vor:

$$z \in l.\,S. \iff \cdots \iff z \in r.\,S. \tag{6}$$

Zu zeigen war für Mengen A, B, C, D:

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) \tag{7}$$

[1] Vgl. Ende des Dokuments
[2] `http://www.webdesign-bu.de/uwe_lueck/tutor.html`

Die Darstellbarkeit von z als geordnetes Paar (x, y) verdient besonders in Bezug auf die rechte Seite von (4) und noch mehr in Bezug auf die linke Seite von (7) Beachtung. Dabei geht es nämlich um die *Verträglichkeit von Quantoren mit Junktoren.* In (7) aus der Übungsaufgabe ist interessant, dass die *Unverträglichkeit* des Existenzquantors ($\exists$) mit der Konjunktion ($\wedge$) gewissermaßen durch die charakteristische Eigenschaft geordneter Paare aufgewogen wird.

Fortsetzung im letzten Abschnitt dieses Dokuments!

– Zur korrekten Bearbeitung von Aufgabe 7 genügt es aber völlig, Herrn Jaskollas Lösung zu lesen. In der Folge wird lediglich das Problem der „Quantorenverträglichkeit“ näher beleuchtet.

§3 Anschaulicher zu Aufgabe 5 (b): Die rechte Seite von (2) ist nach Distribution identisch mit

$$(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2) \tag{8}$$

Vergleicht man (8) mit der linken Seite von (2), so wird diese offenbar von der rechten um $(A_1 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_1)$ übertroffen (falls letztere Menge nicht leer bzw. selbst eine Teilmenge der linken Seite ist). Dies deutet schon an, dass die linke Seite von (1) eine Teilmenge der rechten ist und unter Umständen eine *echte* (Teilmenge).

Auf dem *Roulette*tisch sieht das zum Beispiel so aus: A_1 *rote* Zahlen, A_2 *gerade* Zahlen, B_1 *schwarze* Zahlen, B_2 *ungerade* Zahlen. Auf der *linken* Seite von (1) bzw. (2) stehen dann die *roten geraden* und die *schwarzen ungeraden* Zahlen. Auf der *rechten* Seiten kommen die *roten ungeraden* und die *schwarzen geraden* Zahlen hinzu (übrig bleibt nur noch die 0 für die Spielbank).

§4 Aufgabe 5 und Vertauschen von Quantoren (Zwischenschritt zur Verträglichkeit von Quantoren mit Junktoren, der vielleicht nicht unbedingt sein muss.)

Die fragwürdige Gleichung (1) ist mit $J := \{1, 2\}$ sowie $C_{i1} := A_i$ und $C_{i2} := B_i$ auch ein Spezialfall von

$$\bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} C_{ij} \overset{!?}{=} \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} C_{ij} \tag{9}$$

(9) behauptet Vertauschbarkeit von $\bigcap$ mit $\bigcup$. Diese Behauptung wird durch das Gegenbeispiel 3 *widerlegt.*

(9) stellt vor allem dann eine Verallgemeinerung von (1) dar, wenn man die spezielle Bedingung $J = \{1, 2\}$ zugunsten beliebiger Indexmengen J weglässt.

Die Beziehung der *linken* Seite von (9) zur *Quantorenlogik* ist folgende:

$$\bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} C_{ij} = \{\, z : \forall j \in J\, \exists i \in I : z \in C_{ij} \,\} \tag{10}$$

Die Beziehung der *rechten* Seite von (9) zur Quantorenlogik ist folgende:

$$\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} C_{ij} = \{\, z : \exists i \in I\, \forall j \in J : z \in C_{ij} \,\} \tag{11}$$

z ist in der Menge von (11), wenn es ein $i_0 \in I$ gibt, so dass z Element aller $C_{i_0 j}$ $(j \in J)$ ist, d. h.

$$\forall j \in J : z \in C_{i_0 j} \tag{12}$$

Dank dieses i_0 gilt dann auch

$$\forall j \in J \, \exists i \in I : z \in C_{ij} \tag{13}$$

– d. h. z ist auch Element der Menge von (10). Damit gilt

$$\bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} C_{ij} \subseteq \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} C_{ij} \tag{14}$$

Die **umgekehrte** Richtung gilt ***nicht*** **allgemein**. Das Gegenbeispiel (3) lässt sich mit den Setzungen vor (9) auf $J = \{1, 2\}$ übertragen und widerlegt dann auch die Umkehrung von (14). Ist für *allgemeines* J ein x in der Menge der rechten Seite, so gibt es zwar zu jedem $j \in J$ ein $i \in I$ mit $z \in C_{ij}$, im allgemeinen gibt es jedoch nicht zu allen $j \in J$ ein *gemeinsames* i_0 mit $z \in C_{i_0 j}$ wie in (12).

Analog sieht man, dass noch allgemeiner die quantorenlogische Formel

$$\exists y \, \forall x : \mathcal{A}(x, y) \Longrightarrow \forall x \, \exists y : \mathcal{A}(x, y) \tag{15}$$

allgemeingültig ist, nicht aber ihre Umkehrung. In der Vorlesung (irgendwo in §0.3) wurde ein Gegenbeispiel angegeben, das man hier als Spezialfall mit

$$x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x > y \tag{16}$$

für $\mathcal{A}(x, y)$ wiedergeben kann. Jede reelle Zahl wird von einer natürlichen Zahl übertroffen, es gibt aber keine natürliche Zahl; die alle reellen Zahlen übertrifft.

Dagegen gelten

$$\bigcap_{j \in J} \bigcap_{i \in I} C_{ij} = \bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J} C_{ij} \qquad \text{und} \qquad \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I} C_{ij} = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} C_{ij} \tag{17}$$

da laut Vorlesung die Formeln

$$\forall y \, \forall x : \mathcal{A}(x, y, z) \Longleftrightarrow \forall x \, \forall y : \mathcal{A}(x, y, z) \tag{18}$$

und

$$\exists y \, \exists x : \mathcal{A}(x, y, z) \Longleftrightarrow \exists x \, \exists y : \mathcal{A}(x, y, z) \tag{19}$$

allgemeingültig sind. Die zusätzliche *freie* Variable z wird hier zur Klärung der Anwendung auf die Mengentheorie angezeigt. (18) und (19) können mit weiteren freien Variablen auftreten. (Auch I, J und C sind hier als solche zu betrachten.) Um (17) aus (18) und (19) abzuleiten, verwendet man

$$x \in I \wedge y \in J \wedge z \in C_{xy} \tag{20}$$

für $\mathcal{A}(x, y, z)$, so dass

$$\bigcap_{j \in J} \bigcap_{i \in I} C_{ij} = \{ \, z : \forall j \in J \, \forall i \in I : z \in C_{ij} \, \} = \{ \, z : \forall j \forall i : \mathcal{A}(i, j, z) \, \} \tag{21}$$

und

$$\bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I} C_{ij} = \{\, z : \exists j \in J\, \exists i \in I : z \in C_{ij} \,\} = \{\, z : \exists y \exists x : \mathcal{A}(i,j,z) \,\} \tag{22}$$

§5 Verträglichkeit und Unverträglichkeit von Quantoren mit Junktoren: Wir kehren zum Fall $J = \{1, 2\}$ bzw. zur Situation von Aufgabe 5 zurück. Im Gegensatz zu (1) gelten

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A_i \cap B_i) \tag{23}$$

(das war die Tutoriumsaufgabe 5) und analog

$$\left(\bigcup_{i\in IA} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I}(A_i \cup B_i) \tag{24}$$

Sie sind Spezialfälle von (17). Alternativ können sie auf die Allgemeingültigkeit von

$$\forall x : (\mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x)) \iff (\forall x : \mathcal{A}(x)) \wedge (\forall x : \mathcal{B}(x)) \tag{25}$$

– wurde in der Vorlesung zu 0.5 bewiesen – und

$$\exists x : (\mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}(x)) \iff (\exists x : \mathcal{A}(x)) \vee (\exists x : \mathcal{B}(x)) \tag{26}$$

– wurde in der Vorlesung zu 0.5 erwähnt und wohl auch im 2. Tutorium von Herrn Jaskolla als „Tautologie 3 (a)“ behandelt – zurückgeführt werden. Ersetzt man in (25) $\mathcal{A}(x)$ durch $\neg\mathcal{A}(x)$ und $\mathcal{B}(x)$ durch $\neg\mathcal{B}(x)$, so erhält man (26) durch Kontraposition.

(25) ist die **Verträglichkeit des Allquantors mit der Konjunktion**, (26) die **Verträglichkeit des Existenzquantors mit der Disjunktion**. Dagegen ist der *Allquantor nicht* mit der *Disjunktion* verträglich: der Folgerungspfeil in

$$(\forall x : \mathcal{A}(x)) \vee (\forall x : \mathcal{B}(x)) \Longrightarrow \forall x : (\mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}(x)) \tag{27}$$

ist *nicht* umkehrbar – darauf wurde in der Vorlesung zu 0.5 mit dem Gegenbeispiel $x = 1$ für $\mathcal{A}(x)$ und $x \neq 1$ für $\mathcal{B}(x)$ hingewiesen.[3] Ebensowenig ist der *Existenzquantor* mit der *Konjunktion* verträglich, der Folgerungspfeil in

$$\exists x : (\mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x)) \Longrightarrow (\exists x : \mathcal{A}(x)) \wedge (\exists x : \mathcal{B}(x)) \tag{28}$$

ist nicht umkehrbar (mit demselben Gegenbeispiel). Dieses Phänomen heißt auch **Quantorenunverträglichkeit**.

(*„Verträglichkeit“* ist ein sehr allgemeiner Begriff; häufig tritt Verträglichkeit als *„Distributivgesetz“* auf, z. B. ist „$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$“ die Verträglichkeit der Multiplikation mit der Addition [und umgekehrt]. „$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$“ ist Verträglichkeit der Bildung des Absolutbetrags reeller Zahlen mit ihrer Multiplikation. *Lineare Abbildungen* sind Abbildungen, die mit Vektorenaddition und Skalarmultiplikation verträglich sind.)

[3] Das Gegenbeispiel bedarf wohl einer Ergänzung durch eine Spur *Modelltheorie.*

In den Gegenbeispielen zu Aufgabe 5 (b) wurde davon Gebrauch gemacht, dass sich der Durchschnitt zweier Mengen (Operationssymbol „$\cap$“) auf den allgemeinen Durchschnitt von Mengen (Operatorsymbol „$\bigcap$“) zurückführen lässt. Analog verhält es sich mit der Vereinigung. Die dazu benötigte Indexmenge kann man mit folgendem Trick erhalten:

$$A \cap B = \bigcap_{X \in \{A,B\}} X \qquad \text{und} \qquad A \cup B = \bigcup_{X \in \{A,B\}} X \tag{29}$$

So lassen sich die Verträglichkeit von $\bigcap$ mit $\cap$ (Gleichung (23)) und die von $\bigcup$ mit $\cup$ auf die Vertauschbarkeit zweier $\bigcap$ bzw. zweier $\bigcup$ und auf die Vertauschbarkeit gleichartiger Quantoren zurückführen.

Angesichts der Verträglichkeit des Allquantors mit der Konjunktion und des Existenzquantors mit der Disjunktion sowie der Tatsache, dass der „kleine“ Durchschnitt über den Allquantor, der „große“ über die Konjunktion, die „kleine“ Vereinigung über den Existenzquantor und die „große“ über die Disjunktion definiert werden, kann man sich fragen, ob Allquantor und Konjunktion ebenso zusammenhängen wie $\bigcap$ und $\cap$ sowie Existenzquantor und Disjunktion wie $\bigcup$ und $\cup$ ... Man kann sich aber auch mit der daraus entstehenden Eselsbrücke zu Verträglichkeit und Unverträglichkeit begnügen.

§6 Was Unverträglichkeit nicht ist: Wie die Vorlesung zu 0.10 erwähnt, sind

$$(\forall x : (\mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B})) \iff (\forall x : \mathcal{A}(x)) \wedge \mathcal{B} \tag{30}$$
$$(\forall x : (\mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B})) \iff (\forall x : \mathcal{A}(x)) \vee \mathcal{B} \tag{31}$$
$$(\exists x : (\mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B})) \iff (\exists x : \mathcal{A}(x)) \wedge \mathcal{B} \tag{32}$$
$$(\exists x : (\mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B})) \iff (\exists x : \mathcal{A}(x)) \vee \mathcal{B} \tag{33}$$

allgemeingültig, sofern x nicht in $\mathcal{B}$ vorkommt.[4] Daraus ergibt sich, dass (Quantorenverträglichkeit hin oder her) auch die folgenden Formeln allgemeingültig sind, falls x nicht in $\mathcal{B}(y)$ und y nicht in $\mathcal{A}(x)$ auftritt:

$$(\forall x \forall y : (\mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(y))) \iff (\forall x : \mathcal{A}(x)) \wedge (\forall y : \mathcal{B}(y)) \tag{34}$$
$$(\forall x \forall y : (\mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}(y))) \iff (\forall x : \mathcal{A}(x)) \vee (\forall y : \mathcal{B}(y)) \tag{35}$$
$$(\exists x \exists y : (\mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(y))) \iff (\exists x : \mathcal{A}(x)) \wedge (\exists y : \mathcal{B}(y)) \tag{36}$$
$$(\exists x \exists y : (\mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}(y))) \iff (\exists x : \mathcal{A}(x)) \vee (\exists y : \mathcal{B}(y)) \tag{37}$$

§7 Quantorenverträglichkeit bei kartesischen Produkten (Tutoriumsaufgabe 7):

Mit „$(x, y) \in M$“ statt „$z \in M$“ zu argumentieren ist korrekt, wenn

$$z \in M \iff \exists x \, \exists y : (z = (x, y) \wedge (x, y) \in M) \tag{38}$$

gewährleistet ist. Davon ist „$\Leftarrow$“ nicht von der Definition geordneter Paare betroffen, sondern folgt schon aus folgendem Prinzip der *Prädikatenlogik mit Identität*:

$$\mathcal{A}(a) \wedge a = b \Longrightarrow \mathcal{A}(b) \tag{39}$$

[4] Andernfalls könnte man von $1 = 1$ auf $\forall x : x = 1$ schließen.

Somit erfordert die „(x,y)-Argumentation“ nur noch

$$z \in M \Longrightarrow \exists x\, \exists y : (z = (x,y) \wedge (x,y) \in M) \tag{40}$$

(40) ist der Fall bei $M = A \times (B \cup C)$ (Tutoriumsaufgabe T7, oben Gleichung (4), *linke* Seite) und bei $M = (A \cap C) \times (B \cap D)$ (Übungsaufgabe 7 (a), *rechte* Seite) und ergibt sich dort sofort aus der Definition des kartesischen Produkts.

Im Fall der *rechten* Seite von (4) gemäß der Tutoriumsaufgabe haben wir

$$M = (A \times B) \cup (A \times C) \tag{41}$$

und müssen „$z \in M$“ zunächst nach der Definition der **Vereinigung** auflösen, bevor wir die Definition des kartesischen Produkts anwenden können:

$$\begin{aligned} z \in M \quad &\Longrightarrow \quad z \in (A \times B) \vee z \in (A \times C) \\ &\Longrightarrow \quad (\exists x\, \exists y : ((x,y) \in (A \times B) \wedge z = (x,y))) \ \vee \\ &\qquad\quad (\exists x\, \exists y : ((x,y) \in (A \times C) \wedge z = (x,y))) \end{aligned} \tag{42}$$

Der **Verträglichkeit** von $\exists$ mit $\vee$ ist nun

$$\begin{aligned} z \in M \quad \Longrightarrow \quad \exists x\, \exists y : (((x,y) \in (A \times B) \wedge z = (x,y)) \vee \\ ((x,y) \in (A \times C) \wedge z = (x,y))) \end{aligned} \tag{43}$$

zu verdanken, und (u. a.) ein **Distributivgesetz** beschert

$$\begin{aligned} z \in M \quad \Longrightarrow \quad \exists x\, \exists y : (z = (x,y) \wedge ((x,y) \in (A \times B) \vee \\ (x,y) \in (A \times C)) \end{aligned} \tag{44}$$

Nun folgt (40) direkt aus der Definition der Vereinigung und dem betrachteten Fall (41), und der Beweis zu T7 kann wie in meinem Tutorium zu Ende geführt werden. (Der letzte Schlenker war allerdings vielleicht ein kleiner zu viel.)

§8 „Überwindung“ der Quantorenunverträglichkeit bei geordneten Paaren (Übungsaufgabe 7 (a)):

Im Fall der *linken* Seite von (7) gemäß der Übungsaufgabe haben wir

$$M = (A \times B) \cap (C \times D) \tag{45}$$

und müssen „$z \in M$“ zunächst nach der Definition des **Durchschnitt**s auflösen, bevor wir die Definition des kartesischen Produkts anwenden können:

$$\begin{aligned} z \in M \quad &\Longrightarrow \quad z \in (A \times B) \wedge z \in (C \times D) \\ &\Longrightarrow \quad (\exists x\, \exists y : ((x,y) \in (A \times B) \wedge z = (x,y)) \ \wedge \\ &\qquad\quad (\exists x\, \exists y : ((x,y) \in (C \times D) \wedge z = (x,y)) \end{aligned} \tag{46}$$

Wegen **Quantorenunverträglichkeit** stecken wir hier etwas fest. Hinzu kommt, dass die syntaktisch-formalen Regeln der Vorlesung das reale, eher informelle mathematische Argumentieren noch nicht vollumfänglich nachbilden.[5] Dazu gehört besonders die Methode, Quantoren während eines Beweises „vorübergehend zu vergessen“.

[5]Vgl. *Kalkül des natürlichen Schließens.*

Holen wir einmal tief Luft und vergegenwärtigen wir uns, was wir bisher erreicht haben: Einerseits gibt es laut (46) Objekte x und y mit

$$(x, y) \in (A \times B) \wedge z = (x, y) \tag{47}$$

Andererseits gibt es ...

Vorsicht: Die *Unverträglichkeit des Existenzquantors mit der Konjunktion* äußert sich gerade darin (man erinnere sich an die allgemeinere Frage des Vertauschens von Quantoren, besonders ab (14)), dass ein Beispiel **a** für die Existenz eines Objekts mit der Eigenschaft $\mathcal{A}$ im allgemeinen *nicht* mit einem Beispiel **b** für die Existenz eines Objekts mit der Eigenschaft $\mathcal{B}$ *übereinstimmt.*

„Sicherheitshalber" bezeichnen wir daher die Objekte x' und y' mit der Eigenschaft

$$(x', y') \in (C \times D) \wedge z = (x', y') \tag{48}$$

anders als die entsprechenden im Fall von $(A \times B)$. Statt (46) wäre „sicherer" gewesen:

$$\begin{aligned} z \in M \quad &\Longrightarrow \quad z \in (A \times B) \wedge z \in (C \times D) \\ &\Longrightarrow \quad (\exists x\, \exists y : ((x, y) \in (A \times B) \wedge z = (x, y)) \quad \wedge \\ &\qquad\quad (\exists x'\, \exists y' : ((x', y') \in (C \times D) \wedge z = (x', y')) \end{aligned} \tag{49}$$

– egal. *Es begibt sich aber* ... Letztlich ergeben (47) und (48) gemeinsam

$$(x, y) = z = (x', y') \tag{50}$$

– nach **Definition des geordneten Paars** mithin

$$x = x' \wedge y = y' \wedge (x, y) \in (A \times B) \wedge (x', y') \in (C \times D) \tag{51}$$

– alle Vorsicht vergebens ... und mit dem Identitätsprinzip (39)

$$((x, y) \in (A \times B)) \wedge ((x, y) \in (C \times D)) \tag{52}$$

– nach Definition des *Durchschnitts:*

$$(x, y) \in ((A \times B) \cap (C \times D)) \tag{53}$$

– unter Fall (45):

$$(x, y) \in M \tag{54}$$

Wir nehmen die fallengelassenen Existenzquantoren wieder auf (vgl. *Strickübung*) und schließen (erneut mit dem Identitätsprinzip):

$$z \in M \quad \Longrightarrow \quad \exists x\, \exists y : (z = (x, y) \wedge z \in M) \tag{55}$$

– das ist, wie gewünscht, (40). Mit Assoziativität und Kommutativität der Konjunktion rechtfertigt dies letztlich

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \quad &\Longleftrightarrow \quad x \in A \wedge y \in B \wedge x \in C \wedge y \in D \\ &\Longleftrightarrow \quad (x, y) \in ((A \cap C) \times (B \cap D)) \end{aligned} \tag{56}$$

als Lösung der Aufgabe.

– *Bitte nicht vergessen:* Herrn Jaskollas Beweis zu Aufgabe 7 (a) genügt völlig. Die vorigen Überlegungen dienen nur zur Vertiefung des Vorlesungsstoffs.